

Aliassage : exercices

Pierre Pansu

February 13, 2004

Exercice 1 Soit k la fonction périodique de période 2π qui vaut 1 sur $[0, \pi[$ et -1 sur $[-\pi, 0[$. Calculer ses coefficients de Fourier.

Exercice 2 Soit f une fonction périodique de période 2π . Soit $N \in \mathbf{N}$. On note

$$g_N = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{2k\pi}{N}\right) \delta_{\frac{2k\pi}{N}},$$

où δ_x désigne la masse de Dirac en x . Calculer les coefficients de Fourier de g_N . En utilisant la décomposition de f en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}_n e^{inx},$$

montrer que

$$(\hat{g}_N)_n = \frac{N}{2\pi} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \hat{f}_{n+pN}.$$

Exercice 3 Soient f et g deux fonctions périodiques de période 2π . On note $h = f * g$ leur produit de convolution, défini par

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t) dt.$$

Vérifier que les coefficients de Fourier de h sont donnés par

$$\hat{h}_n = \hat{f}_n \hat{g}_n.$$

Exercice 4 Soit $N \in \mathbf{N}$. Quelle est la fonction χ_N périodique de période 2π dont les coefficients de Fourier valent

$$(\hat{\chi}_N)_n = 1 \text{ si } |n| < N/2, \quad (\hat{\chi}_N)_n = 0 \text{ sinon ?}$$

Tracer sommairement sa courbe représentative (on commencera par tracer la courbe représentative de $x \mapsto \frac{1}{\sin(x/2)}$).