

EXAMEN DE GÉOMÉTRIE  
9 juin 2004, durée 4 heures  
Documents autorisés

I. Etude d'une famille de B-splines planes

Soit  $a$  un paramètre réel. On pose

$$P_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. On s'intéresse à la courbe B-spline  $X_3$  de degré 3 vissée aux extrémités, de points de contrôles  $P_0, \dots, P_6$ , symétrique par rapport à l'axe  $Oy$ . Proposer un vecteur de noeuds d'extrémités 0 et 1 qui convienne.
2. Montrer que si  $a \leq -1$ , la courbe  $X_3$  est convexe. Montrer que si  $a < 0$ ,  $X_3$  n'a pas de points doubles.
3. Sur une figure, représenter le polygone de contrôle  $(Q_j^1)$  de la dérivée  $X_3'$ . Montrer que la courbe  $X_3$  passe par  $P_3$  et y est tangente au segment  $P_3P_4$ .
4. Montrer que pour  $a$  assez grand, la courbe  $X_3$  possède des points doubles.
5. Montrer qu'il existe un noeud  $t$  tel que  $X_3'(t) = \frac{1}{2}(Q_2^1 + Q_3^1)$  (on pourra utiliser les exercices du cours pour avoir les valeurs des fonctions B-splines). En déduire une valeur  $a_0$  de  $a$  pour laquelle  $X_3'(t)$  est dirigé suivant  $Oy$ . Calculer la dérivée seconde  $X_3''(t)$ . En déduire que pour  $a = a_0$ , il existe  $s < t$  tel que  $X_3'(s)$  soit dirigé suivant  $Oy$ . Faire un dessin.

II. Interpolation d'une hélice

Une *hélice* est la courbe décrite par un point qui tourne à vitesse constante le long d'une droite tout en avançant à vitesse constante le long de cette droite.

1. Montrer que toute courbe de Bézier de degré 2 dans  $\mathbf{R}^n$  est contenue dans un sous-espace vectoriel de dimension 3. En déduire que toute courbe de Bézier rationnelle de degré 2 est contenue dans un plan. Montrer qu'une hélice n'est pas une courbe de Bézier rationnelle de degré 2.
2. Ecrire la paramétrisation rationnelle  $t \mapsto q(t)$ ,  $[0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$  du quart de cercle de rayon  $R > 0$  dans le quadrant  $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ . C'est une courbe de Bézier rationnelle de degré 2, donner ses points de contrôle et ses poids. Pour quelle valeur  $\hat{t}$  de  $t$  le point  $q(t)$  se trouve-t-il sur l'axe de symétrie du quart de cercle ?
3. Paramétrer au moyen d'un angle l'hélice d'axe  $Oz$ , de rayon  $R$  et de pas  $h$  (i.e. qui avance d'une hauteur  $h$  après un tour complet). Il existe une fonction  $Z : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  telle que  $t \mapsto h(t) = (q(t), Z(t))$  soit une paramétrisation d'un arc de l'hélice. Que vaut  $Z$  ? Que vaut  $h(\hat{t})$  ?
4. On considère la famille  $\mathcal{F}$  des courbes de Bézier rationnelles de degré 2  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$  dont la projection orthogonale sur le plan  $\{z = 0\}$  coïncide avec  $q$  et qui, en  $t = 0$  et  $t = 1$ , passent par  $h(0)$  et  $h(1)$ . Montrer que  $\dim \mathcal{F} = 1$ . Montrer qu'il existe une unique courbe  $c_0 \in \mathcal{F}$  telle que  $c_0$  et  $h$  coupent le plan  $\{x = y\}$  au même endroit. Quels sont les points de contrôle et les poids de  $c_0$  ?

5. Soit  $\Sigma$  la surface réglée qui est la réunion des segments de droites issues de l'axe  $Oz$ , orthogonales à l'axe  $Oz$  et aboutissant aux points de  $c_0$ . Paramétrer  $\Sigma$ . Montrer que  $\Sigma$  est une surface NURBS, donner son bidegré, ses vecteurs de noeuds, son réseau de contrôle et ses poids.

### III. Vue en perspective d'une NURBS

On note  $\mathcal{P} : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^n$  la projection centrale définie par

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto \left( \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)$$

On rappelle qu'une application  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$  est *projective* si il existe une application linéaire  $L : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{p+1}$  telle que  $\mathcal{P} \circ L = f \circ \mathcal{P}$ . On appelle alors *matrice* de  $f$  la matrice de  $L$ . Elle est bien définie à multiplication par un scalaire près.

1. Montrer que l'image par une application projective d'une NURBS de  $\mathbf{R}^n$  est une NURBS de  $\mathbf{R}^p$ .
2. Soient  $0 < d < D$  des réels. Dans  $\mathbf{R}^3$ , soit  $f$  la vue en perspective sur l'écran placé en  $\{x = D - d\}$  depuis le point  $C = (D, 0, 0)$ . Montrer que  $f$  est projective, et écrire sa matrice.
3. Soit  $X$  la courbe de Bézier rationnelle de degré 2 dans  $\mathbf{R}^3$  dont la projection orthogonale sur le plan  $\{z = 0\}$  est le quart de cercle de rayon  $R > 0$  dans le quadrant  $\{x > 0, y > 0\}$  et dont la projection orthogonale sur l'axe  $Oz$  est la fonction  $z = \frac{h}{4} \frac{t+t^2}{1+t^2}$ , où  $h > 0$ . Ecrire son polygone de contrôle et ses poids.
4. Soit  $v$  le vissage d'axe  $Oz$ , d'angle  $\pi/2$  et de translation  $h/4$ . Montrer que l'image  $v(X)$  est une NURBS. Quels sont son polygone de contrôle et ses poids ? Montrer que  $X$  et  $v(X)$  ont un point commun où elles ont même tangente.
5. Soit  $Z = f(X)$  la vue en perspective de  $X$ . Ecrire son polygone de contrôle et ses poids.

### IV. L'hélice comme courbe rationnelle ?

1. Soit  $R$  une fraction rationnelle,

$$R(x) = \prod_{j=1}^d (x - z_j)^{m_j}$$

où  $m_j \in \mathbf{Z}$ ,  $z_j \in \mathbf{C}$ . Calculer la dérivée logarithmique  $\frac{d \log(R(x))}{dx}$ . Soit  $S$  une fraction rationnelle décomposée en éléments simples sur  $\mathbf{C}$ ,

$$S(x) = \sum_k a_k x^k + \sum_j \sum_{k=1}^{d_j} \frac{b_{j,k}}{(x - w_j)^k}$$

où  $a_k, b_{j,k}, w_j \in \mathbf{C}$  et  $d_j \in \mathbf{N}$ . Calculer la dérivée de  $S$ . En déduire que si  $R = \exp(S)$  sur un intervalle de  $\mathbf{R}$ , alors  $R$  et  $S$  sont constantes. Montrer que la courbe d'équation  $y = e^x$  n'admet pas de paramétrisation rationnelle, même localement.

2. On suppose qu'il existe des fractions rationnelles  $R$  et  $S$  telles que  $\cos(R(x)) = S(x)$  sur un intervalle de  $\mathbf{R}$ . Dérivée cette équation et en déduire que  $\exp(iR(x))$  est une fraction rationnelle. Conclure que la courbe d'équation  $y = \cos x$  n'admet pas de paramétrisation rationnelle, même localement.
3. Montrer qu'une hélice n'admet pas de paramétrisation rationnelle.

CORRIGÉ DE L'EXAMEN DE GÉOMÉTRIE  
 9 juin 2004

I. Etude d'une famille de courbes B-splines planes

1. Une courbe de degré 3 vissée aux extrémités a des noeuds de multiplicité 4 aux extrémités. 7 points de contrôle, degré 3, donc 3 noeuds internes. Pour que la courbe soit symétrique, il convient de choisir un vecteur de noeuds symétrique, comme  $(0, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1, 1)$ .

2. Si  $a \leq -1$ , le polygone de contrôle est convexe, donc la courbe est convexe. Si  $-1 < a < 0$ , l'enveloppe convexe du polygone de contrôle est le carré de sommets  $P_0P_2P_4P_6$ . Par chaque point du carré passent plusieurs droites par rapport auxquelles la variation du polygone de contrôle vaut 1. En effet, c'est le cas pour les droites de pente 1 ou  $-1$  qui passent en dessous de l'origine, pour les droites passant par l'origine et de pente  $> 1$  ou  $< -1$ , et pour les droites voisines. Par conséquent, tout point  $A = X_3(t)$  de la courbe appartient à deux droites  $D$  et  $D'$  par rapport auxquelles la variation de la courbe vaut au plus 1. Si  $X_3'(t) = 0$ ,  $X_3$  présente un point de rebroussement. En traduisant  $D$ , on trouve une droite qui coupe la courbe transversalement en 2 points, ce qui contredit le fait que la variation vaut au plus 1. Par conséquent,  $X_3'(t) \neq 0$ ,  $X_3$  traverse l'une des deux droites et ne peut donc plus revenir en  $A$ , donc  $X_3$  n'a pas de points doubles.

3. D'après le cours,

$$Q_1^1 = 12\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 12(a+1) \\ 12 \end{pmatrix}, \quad Q_2^1 = 6\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 6(-a-1) \\ 6 \end{pmatrix}, \quad Q_3^1 = 4\overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_4^1 = 4\overrightarrow{P_3P_4} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Q_5^1 = 6\overrightarrow{P_4P_5} = \begin{pmatrix} 6(-a-1) \\ -6 \end{pmatrix}, \quad Q_6^1 = 12\overrightarrow{P_5P_6} = \begin{pmatrix} 12(a+1) \\ -12 \end{pmatrix}.$$

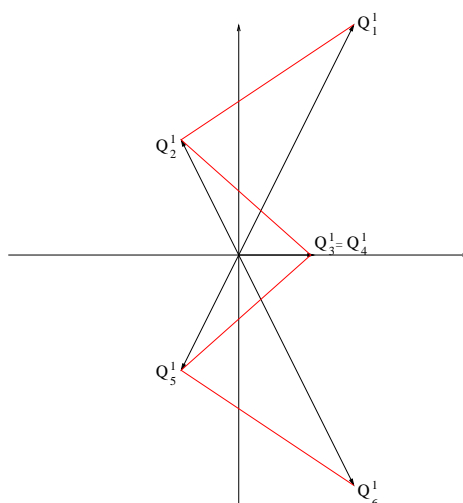


Figure 1 : Polygone de contrôle de la dérivée, pour  $a = -1/2$

Par symétrie, la courbe passe par  $P_3$  en  $t = \frac{1}{2}$  et la courbe dérivée coupe l'axe  $Ox$  en  $t = \frac{1}{2}$ . Plus précisément,  $X_3'(\frac{1}{2}) = Q_4^1$ . En effet,  $X_3'$  est une B-spline de degré 2. En un noeud, seules deux

fonctions B-splines de degré 2 sont non nulles, donc

$$X_3'(\frac{1}{2}) = B_{3,2}(\frac{1}{2})Q_3^1 + B_{4,2}(\frac{1}{2})Q_4^1 = (B_{3,2}(\frac{1}{2}) + B_{4,2}(\frac{1}{2}))Q_4^1 = Q_4^1,$$

car  $Q_3^1 = Q_4^1$ . Par conséquent  $X_3$  est tangente au segment  $P_3P_4$  en  $P_3$ .

4. Par définition,

$$X_3(\frac{1}{4}) = B_{1,3}(\frac{1}{4})P_1 + B_{2,3}(\frac{1}{4})P_2 + B_{3,3}(\frac{1}{4})P_3,$$

où les coefficients ne dépendent pas de  $a$ . Par conséquent, la première coordonnée  $x_3(\frac{1}{4})$  est une fonction affine de  $a$ , qui tend vers  $+\infty$  quand  $a$  tend vers  $+\infty$ . Il existe donc  $b$  tel que  $x_3(\frac{1}{4}) > 0$  pour  $a > b$ . Par symétrie,  $x_3(\frac{3}{4}) = -x_3(\frac{1}{4})$ , donc, pour  $a > b$ ,  $x_3(\frac{3}{4}) - x_3(\frac{1}{4}) > 0$ . La fonction continue  $t \mapsto x_3(t) - x_3(1-t)$  est négative en  $t = 0$ , positive en  $t = \frac{1}{4}$  donc elle s'annule pour un  $s \in ]0, \frac{1}{4}[$ , soit  $x_3(1-s) = x_3(s)$ . Par symétrie,  $y_3(1-s) = y_3(s)$ , donc  $X_3(1-s) = X_3(s)$ .

5. Par définition,

$$X_3'(\frac{1}{4}) = B_{1,2}(\frac{1}{4})Q_2^1 + B_{2,2}(\frac{1}{4})Q_3^1 = (1 - B_{2,2}(\frac{1}{4}))Q_2^1 + B_{2,2}(\frac{1}{4})Q_3^1.$$

La fonction  $B_{2,2}$  est une fonction B-spline uniforme (voir exercice 2 du cours sur les courbes B-splines), qui vaut  $\frac{1}{2}$  aux noeuds où elle ne s'annule pas. On trouve donc

$$X_3'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}(Q_2^1 + Q_3^1) = \begin{pmatrix} -3a - 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

dont la première composante s'annule lorsque  $a = a_0 = -\frac{1}{3}$ . La dérivée seconde  $X_3''$  est une B-spline de degré 1. Au noeud  $\frac{1}{4}$ , elle se trouve au sommet  $Q_3^2$  de son polygone de contrôle, et

$$Q_3^2 = Q_3^1 - Q_2^1 = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Comme l'accélération pointe vers la droite,  $\frac{1}{4}$  est un minimum local de la fonction  $x_3$ . Comme  $X_3(\frac{1}{4})$  est un barycentre de  $P_1, P_2$  et  $P_3$ ,  $x_3(\frac{1}{4}) > x_3(0)$ . On conclut que la fonction  $x_3$  atteint un extremum en un point  $s \in ]0, \frac{1}{4}[$ . En ce point, la vitesse  $X_3'(s)$  est dirigée suivant  $Oy$ .

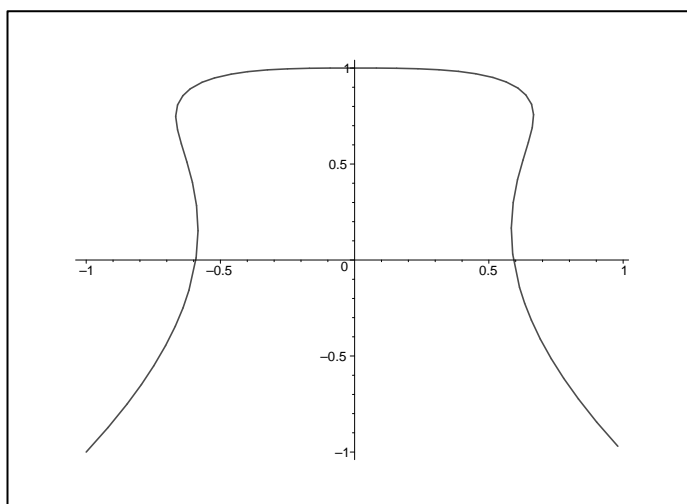


Figure 2 : Tracé de la courbe  $X_3$  pour  $a = -\frac{1}{3}$

## II. Interpolation d'une hélice

**1.** Une courbe de Bézier de degré 2 possède trois points de contrôle, donc est contenue dans un sous-espace vectoriel de dimension 3. Une courbe de Bézier rationnelle de degré 2 est la projection centrale d'une courbe de Bézier de degré 2, donc est contenue dans la projection d'un sous-espace vectoriel de dimension 3, qui est un plan affine. Une hélice est une courbe tracée sur un cylindre. Lorsqu'elle est parcourue à vitesse constante, elle monte le long de l'axe à vitesse constante, donc son accélération est orthogonale à l'axe. Si l'hélice était plane, elle serait contenue dans un plan orthogonal à l'axe, donc ce serait un cercle. Ce n'est pas le cas. On conclut qu'une hélice n'est pas une courbe de Bézier rationnelle de degré 2.

**2.**

$$q(t) = \left( R \frac{1-t^2}{1+t^2}, R \frac{2t}{1+t^2} \right), \quad P_0 = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_0 = 1, \quad P_1 = \begin{pmatrix} R \\ R \end{pmatrix}, \quad w_1 = 1, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix}, \quad w_2 = 2.$$

$q(t)$  se trouve sur la bissectrice  $\{x = y\}$  si et seulement si  $1 - t^2 = 2t$ , ce qui donne  $t = \sqrt{2} - 1$ .

**3.** L'application

$$\theta \mapsto \left( R \cos(\theta), R \sin(\theta), \theta \frac{h}{2\pi} \right)$$

convient. On change le paramètre  $\theta$  en  $t$  de sorte que  $\left( R \frac{1-t^2}{1+t^2}, R \frac{2t}{1+t^2} \right) = (R \cos(\theta), R \sin(\theta))$ . Autrement dit,  $t = \tan(\theta/2)$ ,  $\theta = 2 \arctan t$ , ce qui donne

$$Z(t) = \frac{h}{\pi} \arctan t.$$

$h(\hat{t})$  est le point de l'hélice qui se trouve dans le plan  $\{x = y\}$ , donc

$$h(\hat{t}) = \left( R \frac{\sqrt{2}}{2}, R \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{h}{8} \right),$$

car, lorsqu'on tourne d'un huitième de tour, on monte de  $h/8$  le long de l'hélice.

**3.** On cherche trois points  $Q_0, Q_1, Q_2$  de  $\mathbf{R}^3$  et trois poids  $w_0, w_1, w_2$  tels que de la courbe de Bézier rationnelle de degré 2 associée passe par  $h(0)$  et  $h(1)$  et se projette sur  $q$ . Nécessairement, les  $Q_i$  se projettent sur les  $P_i$ ,  $Q_0 = h(0)$  et  $Q_2 = h(1)$ . Le fait que la projection donne la paramétrisation  $q$  du cercle entraîne que les poids sont proportionnels à 1, 1, 2. La seule inconnue est la troisième coordonnée  $z_1$  du point  $Q_1$ . Par conséquent, la famille  $\mathcal{F}$  est de dimension 1. La troisième coordonnée de la courbe  $c$  s'écrit

$$z(t) = (1-t)^2 z_0 + 2t(1-t)z_1 + t^2 z_2.$$

Par conséquent

$$z(\hat{t}) = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)z_1 + \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)h.$$

La condition  $z(\hat{t}) = h/8$  donne

$$z_1 = \frac{-6 + 5\sqrt{2}}{32}h.$$

**4.** Notons  $\sigma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}$  la projection orthogonale de  $c_0(t)$  sur l'axe  $Oz$ . On paramètre  $\Sigma$  par

$$(u, v) \mapsto \Sigma(u, v) = (1-v)\sigma(u) + v c_0(u).$$

La courbe  $u \mapsto \sigma(u)$  est une courbe de Bézier rationnelle de degré 2 de poids 1, 1, 2 et de points de contrôle

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \Sigma(u, v) &= (1-v) \frac{\sum_{i=0}^2 B_{i,2}(u)w_i A_i}{\sum_{i=0}^2 B_{i,2}(u)w_i} + v \frac{\sum_{i=0}^2 B_{i,2}(u)w_i Q_i}{\sum_{i=0}^2 B_{i,2}(u)w_i} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^2 B_{i,2}(u)w_i((1-v)A_i + vQ_i)}{\sum_{i=0}^2 B_{i,2}(u)w_i} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^1 B_{i,2}(u)B_{j,1}(v)w_i Q_{ij}}{\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^1 B_{i,2}(u)B_{j,1}(v)w_{ij}}, \end{aligned}$$

où  $w_{ij} = w_i = 1, 1, 2$ ,  $Q_{ij} = A_i$  si  $j = 0$ ,  $Q_{ij} = Q_i$  si  $j = 1$ . Autrement dit,  $\Sigma$  est un carreau de Bézier rationnel de bidegré (2, 1), le vecteur de noeuds en  $u$  est 0, 0, 0, 1, 1, 1, celui en  $v$  est 0, 0, 1, 1.

### III. Vue en perspective d'une NURBS

**1.** Soit  $f$  une application projective de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}^p$ , associée à une application linéaire  $L : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{p+1}$ . Soit  $X$  une NURBS de points de contrôle  $P_i$  et de poids  $w_i$ . Alors  $X = \mathcal{P}(Y)$  où  $Y$  est la courbe B-spline dans  $\mathbf{R}^{n+1}$  de points de contrôle  $R_i = (w_i, w_i P_i)$ , et  $f(X) = \mathcal{P}(L(Y))$  où  $L(Y)$  est la courbe B-spline dans  $\mathbf{R}^{n+1}$  de points de contrôle  $L(R_i)$ . Par conséquent,  $f(X)$  est une NURBS de  $\mathbf{R}^p$ .

**2.** Si  $P \in \mathbf{R}^3$ , sa projection  $f(P)$  dans le plan est le point tel que  $P' = (D - d, f(P))$ ,  $P$  et la caméra  $C = (D, 0, 0)$  sont alignés. Il vient

$$f(P) = \begin{pmatrix} \frac{-dy}{x-D} \\ \frac{-dz}{x-D} \end{pmatrix} = [D - x : dy : dz] = L[1 : x : y : z]$$

où

$$L = \begin{pmatrix} D & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

(On a choisi de mettre la coordonnée supplémentaire en premier). Par conséquent,  $f$  est projective, de matrice  $L$ .

**3.** On choisit comme poids 1, 1, 2 et comme projections sur le plan horizontal des points de contrôle  $R_0 = (P_0, z_0)$ ,  $R_1 = (P_1, z_1)$  et  $R_2 = (P_2, z_2)$  les points  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$  de la question II.2. Il reste à déterminer les troisièmes coordonnées  $z_i$  de sorte que

$$\frac{(1-t)^2 z_0 + 2t(1-t)z_1 + t^2 z_2}{1+t^2} = \frac{h}{4} \frac{t+t^2}{1+t^2}.$$

On trouve  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = h/8$ ,  $z_2 = h/4$ , soit

$$R_0 = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} R \\ R \\ h/8 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ h/4 \end{pmatrix}.$$

4. Avec la convention  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ,  $x_3 = z$  et que la coordonnées supplémentaire est  $x_0$ , la matrice  $4 \times 4$  du vissage  $v$  d'angle  $\pi/2$ , d'axe  $Oz$ , de translation  $h/4$ , est 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ h/4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les points de contrôle de  $X$  ont pour coordonnées homogènes  $[1 : R : 0 : 0]$ ,  $[1 : R : R : h/8]$  et  $[2 : 0 : 2R : h/2]$ . Par conséquent, les points de contrôle de  $v(X)$  ont pour coordonnées homogènes  $[1 : 0 : R : h/4]$ ,  $[1 : -R : R : 3h/8]$  et  $[2 : -2R : 0 : h]$ . Autrement dit,  $v(X)$  est la courbe de Bézier rationnelle de poids 1, 1, 2 et de points de contrôle  $S_0 = (0, R, h/4)$ ,  $S_1 = (-R, R, 3h/8)$  et  $S_2 = (R, 0, h/2)$ . On constate que  $S_0 = R_2$  et que  $\overrightarrow{S_0S_1} = \overrightarrow{R_1R_2}$ . Par conséquent, en leur point commun  $S_0 = R_2$ , les courbes  $X$  et  $v(X)$  ont même tangente.

5. On applique la matrice  $L$  aux points de contrôle de  $X$  en coordonnées homogènes. On trouve que les points de contrôle de  $f(X)$  ont pour coordonnées homogènes  $[D - R : 0 : 0]$ ,  $[D - R : dR : dh/8]$  et  $[2D : 2dR : dh/2]$ . Autrement dit,  $f(X)$  est la courbe de Bézier rationnelle de poids  $D - R, D - R, 2D$  et de points de contrôle

$$T_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} \frac{dR}{D-R} \\ \frac{dh}{8(D-R)} \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} \frac{dR}{2D} \\ \frac{dh}{4D} \end{pmatrix}.$$

#### IV. L'hélice comme courbe rationnelle ?

1. On trouve

$$\frac{d \log(R(x))}{dx} = \sum_{j=1}^d \frac{m_j}{x - z_j},$$

$$S'(x) = \sum_k k a_k x^{k-1} + \sum_j \sum_{k=1}^{d_j} \frac{-k b_{j,k}}{(x - w_j)^{k+1}}.$$

Les deux expressions sont des décompositions en éléments simples, qui ne comportent aucun terme commun. Si elles sont égales, elles sont nulles. Par conséquent, si  $S = \log(R)$  sur un intervalle, alors  $S$  et  $R$  sont constantes. Soit  $t \mapsto (S(t), R(t))$  une application rationnelle définie sur un intervalle de  $\mathbf{R}$ , à valeurs dans la courbe d'équation  $y = e^x$ . Alors  $R$  et  $S$  sont constantes. Par conséquent, la courbe d'équation  $y = e^x$  n'admet pas de paramétrisation rationnelle, même localement.

2. En dérivant l'équation  $\cos(R(x)) = S(x)$ , il vient  $-R'(x) \sin(R(x)) = S'(x)$ . Par conséquent

$$\exp(iR(x)) = S(x) - i \frac{S'(x)}{R'(x)}$$

est rationnelle. D'après la question précédente,  $R$  est constante. Par conséquent, la courbe d'équation  $y = \cos x$  n'admet pas de paramétrisation rationnelle, même localement.

3. Il existe des coordonnées dans lesquelles l'hélice est paramétrée par  $\theta \mapsto (\cos(\theta), \sin(\theta), \theta)$ , i.e. satisfait les équations  $x = \cos(z)$  et  $y = \sin(z)$ . Toute paramétrisation rationnelle de l'hélice fournit des fractions rationnelles  $R$  et  $S$  telles que  $x = S(t)$  et  $z = R(t)$ , i.e. une solution non constante de l'équation  $S = \cos(R)$ . D'après la question précédente, cela n'existe pas. On conclut qu'une hélice n'admet pas de paramétrisation rationnelle.