

Courbes B-splines

Pierre Pansu

February 7, 2004

1 Motivation

1.1 Les besoins du design

Les objets fabriqués par l'industrie comportent des lignes courbes. Les logiciels de CAO proposent un catalogue de formes simples (segments de droites, arcs de cercles, de cônes...) mais elles ne suffisent pas. Le **designer** a besoin d'une famille plus riche de courbes, dépendant de paramètres. Il souhaite

- disposer de suffisamment de paramètres pour pouvoir spécifier des conditions aux limites et autres contraintes ;
- deviner l'effet de chaque paramètre, pour trouver rapidement en les ajustant une courbe qui correspond à celle qu'il a imaginée.

D'autre part, le calcul de la courbe en fonction des paramètres doit être rapide.

Les B-splines, utilisées en analyse numérique depuis les années 30, possèdent les propriétés voulues. Comme il est impossible de paramétrer exactement un cercle au moyen de B-splines, on introduit une famille un peu plus large, les *B-splines rationnelles* (NURBS), qui feront l'objet du chapitre suivant.

L'objet de ce chapitre est de définir les B-splines, de décrire les algorithmes nécessaires à leur manipulation, les paramètres en jeu, leur signification et leurs effets.

1.2 Construction des B-splines

On se donne une suite de points $t_0 \leq \dots \leq t_m$ de la droite réelle, appelés *noeuds* (**knots**). Le vecteur (t_0, \dots, t_m) s'appelle le *vecteur des noeuds* (**knot vector**). Certains noeuds peuvent être confondus. Si r noeuds sont égaux à un réel τ , on dit que τ est de *multiplicité* r .

On se donne d'autre part des points P_0, \dots, P_m dans \mathbf{R}^n , appelés *points de contrôle* (**control points**) qui forment ensemble le *polygone de contrôle* (**control polygon**). On l'imagine comme une courbe $t \mapsto X_0(t)$ qui saute d'un point à l'autre aux temps t_i , i.e.

$$X_0(t) = P_i \quad \text{pour } t \in [t_i, t_{i+1}[.$$

(Si le noeud $t_i = t_{i+1}$, le sommet P_i est simplement ignoré).

On cherche à approcher cette courbe discontinue par une courbe plus régulière. La première étape consiste à faire passer une ligne polygonale par les points P_i , i.e. lorsque t varie entre deux noeuds t_i et t_{i+1} , $X_1(t)$ décrit le segment $[P_{i-1}, P_i]$ à vitesse constante. On trouve la formule

$$X_1(t) = \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}\right)P_{i-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}P_i.$$

(Si $t_i = t_{i+1}$, la courbe saute de P_{i-1} à P_i en t_i). Si les noeuds sont tous distincts, la courbe obtenue est continue mais non dérivable en général. Ses composantes sont des fonctions linéaires par morceaux.

L'étape suivante conduit (si les noeuds sont tous distincts) à une courbe X_2 de classe C^1 (mais non C^2 en général), au prix d'augmenter le degré : elle est quadratique par morceaux. Elle ne passe plus par les sommets P_i , mais conserve une proximité au polygone en un sens différent : si t est compris entre les noeuds t_i et t_{i+1} , $X_2(t)$ est dans l'enveloppe convexe des sommets P_{i-2} , P_{i-1} et P_i .

Comment trouver X_2 , et plus généralement, X_k pour $k \geq 2$? Supposons les points P_i affinement indépendants. Alors la courbe X_{k-1} s'écrit de manière unique comme combinaison

$$X_{k-1}(t) = \sum_i B_{i,k-1}(t)P_i$$

où les fonctions $B_{i,k}$ sont positives ou nulles, et leur somme vaut 1. Pour gagner un degré de différentiabilité, l'idée est de remplacer dans cette formule la suite de points fixes P_i par des points $P_i(t)$ mobiles le long du polygone de contrôle, où $P_i(t)$ se déplace de P_{i-1} à P_i pendant l'intervalle de temps $[t_i, t_{i+k}]$. Autrement dit, on pose

$$X_k(t) = \sum_i B_{i,k-1}(t) \left(\left(1 - \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i}\right) P_{i-1} + \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} P_i \right)$$

Cela donne pour les fonctions $B_{i,k}$ la relation de récurrence

$$B_{i,k}(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} B_{i,k-1}(t) + \left(1 - \frac{t-t_{i+1}}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}\right) B_{i+1,k-1}(t)$$

qui les détermine uniquement.

Cela une famille de courbes au service du **design**. Le paramètre principal est le polygone de contrôle, dont la courbe épouse les formes. La complexité du calcul de la courbe dépend avant tout du degré de différentiabilité (on s'arrête souvent à $k = 3$). Le paramètre secondaire est le vecteur des noeuds. On s'en sert avant tout pour s'assurer que la courbe passe par des points prescrits avec des tangentes prescrites, i.e. pour contrôler les raccords.

1.3 Plan de la suite du chapitre

1. Définition et propriétés des fonctions splines
2. Courbes splines et courbes de Bézier
3. Algorithmes : calcul du point courant, de la dérivée, ajout d'un point de contrôle
4. Convexité
5. Courbure et condition de raccord

1.4 Bibliographie

Ces notes sont très largement inspirées du livre de J.-J. Risler, [R].

On trouvera dans les ouvrages de G. Farin, [F] et J. Hoschek et D. Lasser; [HL] de nombreuses figures, une présentation plus complète de la problématique du design ainsi que des notes historiques.

2 Définition et propriétés des fonctions B-splines

2.1 Définition

On se donne une suite de noeuds $t_0 \leq \dots \leq t_m$ sur la droite réelle.

Notation. Soit $j = 1, \dots, m + 1 - i$. Si $t_i < t_{i+1}$, on note

$$\omega_{i,j}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+j} - t_i}.$$

Si $t_i = t_{i+1}$, on pose $\omega_{i,j} = 0$.

Convention. Cette notation illustre une convention qu'on va utiliser partout : *Chaque fois qu'on écrit une fraction dont le dénominateur est nul, il faut l'interpréter par 0.*

Définition 2.1 On définit par récurrence sur k les fonctions B-splines $B_{i,k}$ pour $i = 0, \dots, m - k - 1$, par les relations suivantes.

$$B_{i,0}(t) = 1 \quad \text{pour } t \in [t_i, t_{i+1}[, \quad = 0 \quad \text{sinon,}$$

et pour $k \geq 1$,

$$B_{i,k}(t) = \omega_{i,k}(t)B_{i,k-1}(t) + (1 - \omega_{i+1,k}(t))B_{i+1,k-1}(t).$$

Remarque. Les fonctions B-splines constituent une base (parmi d'autres) de l'espace vectoriel des fonctions définies sur l'intervalle $[t_0, t_{m-k}]$, polynômiales de degré inférieur ou égal à k sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$, de classe C^{k-r} au voisinage de chaque noeud de multiplicité r (voir [R], paragraphe 1.4). Les mérites particuliers à cette base sont énumérés dans les propositions 2.6 et 5.3.

2.2 B-splines uniformes

Proposition 2.2 On pose, pour $i \in \mathbf{Z}$, $t_i = i$. Alors pour tout $i \in \mathbf{Z}$, $k \geq 1$ et $t \in \mathbf{R}$,

$$B_{i,k}(t+1) = B_{i-1,k}(t) \quad \text{et} \quad B_{0,k}(k+1-t) = B_{0,k}(t).$$

Soient $i \in \mathbf{Z}$ et $t \in \mathbf{R}$. A l'aide des identités $B_{i,0}(t+1) = B_{i-1,0}(t)$ et $\omega_{i,k}(t+1) = \omega_{i-1,k}(t)$, on montre aisément par récurrence sur k que $B_{i,k}(t+1) = B_{i-1,k}(t)$ pour tout k .

Montrons par récurrence sur k que pour $k \geq 1$, $B_{0,k}(k+1-t) = B_{0,k}(t)$. On calcule $B_{0,1}(t) = t \mathbf{1}_{[0,1[} + (2-t) \mathbf{1}_{[1,2[}$. Cette fonction satisfait $B_{0,1}(2-t) = B_{0,1}(t)$. Supposons l'identité démontrée pour la B-spline uniforme de degré $k-1$. On remarque que $\omega_{0,k}(k+1-t) = \frac{k+1-t}{k} = 1 - \omega_{1,k}(t)$. Par l'hypothèse de récurrence et l'invariance par translation,

$$B_{0,k-1}(k+1-t) = B_{0,k-1}(t-1) = B_{1,k-1}(t).$$

Il vient

$$\begin{aligned} B_{0,k}(k+1-t) &= \omega_{0,k}(k+1-t)B_{0,k-1}(k+1-t) + (1 - \omega_{1,k}(k+1-t))B_{1,k-1}(k+1-t) \\ &= (1 - \omega_{1,k}(t))B_{1,k-1}(t) + \omega_{0,k}(t)B_{0,k-1}(t) \\ &= B_{0,k}(t). \end{aligned}$$

On ne calcule que $B_{0,k}$, les autres fonctions B-splines uniformes s'en déduisent par translation. La relation de récurrence qui définit les B-splines devient

$$B_{0,k}(t) = \frac{t}{k} B_{0,k-1}(t) + \frac{k+1-t}{k} B_{0,k-1}(t-1).$$

On calcule $B_{0,0} = \mathbf{1}_{[0,1[}$, $B_{0,1} = t \mathbf{1}_{[0,1[} + (2-t) \mathbf{1}_{[1,2[}$, $B_{0,2} = \frac{t^2}{2} \mathbf{1}_{[0,1[} + \frac{-2t^2+6t-3}{2} \mathbf{1}_{[1,2[} + \frac{(3-t)^2}{2} \mathbf{1}_{[2,3[}$, $B_{0,3} = \frac{t^3}{6} \mathbf{1}_{[0,1[} + \frac{-3t^3+12t^2-12t+4}{6} \mathbf{1}_{[1,2[} + \frac{3t^3-24t^2+60t-44}{6} \mathbf{1}_{[2,3[} + \frac{(4-t)^3}{6} \mathbf{1}_{[3,4[}$. ■

2.3 Polynômes de Bernstein

Proposition 2.3 On pose $t_0 = t_1 = \dots = t_k = 0$, $t_{k+1} = \dots = t_{2k+1} = 1$. Alors, pour $i = 0, \dots, k$,

$$B_{i,k}(t) = C_k^i t^i (1-t)^{k-i}$$

pour $t \in [0, 1[$, $B_{i,k}(t) = 0$ sinon. Les autres fonctions B-splines sont nulles. En particulier,

$$B_{k-i,k}(t) = B_{i,k}(1-t).$$

Preuve. On calcule $\omega_{i,k} = 0$ sauf si $t_i = 0$ et $t_{i+k} = 1$, auquel cas $\omega_{i,k} = t$. Comme le support de $B_{i,k-1}$ est l'intervalle $[t_i, t_{i+k}[$, constate que pour $t \in [0, 1[$, $\omega_{i,k}(t) \neq 0 \Leftrightarrow B_{i,k-1}(t) \neq 0$. Par conséquent, la relation de récurrence devient, pour $t < 1$,

$$B_{i,k}(t) = tB_{i,k-1}(t) + (1-t)B_{i+1,k-1}(t),$$

d'où la formule de l'énoncé résulte aisément. ■

2.4 Exercices

Entre les deux situations extrêmes ci-dessus (noeuds tous simples pour les B-splines uniformes, noeuds de multiplicité maximale pour les polynômes de Bernstein), il est utile d'étudier les situations intermédiaires.

Exercice 1 On pose $t_0 = t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$, $t_4 = 3$, etc.. Calculer $B_{i,k}$ pour $k \leq 2$ et $0 \leq i \leq 3 - k$.

Exercice 2 On pose $t_0 = t_1 = t_2 = 0$, $t_3 = 1$, $t_4 = 2$, $t_5 = 3$, etc..

Calculer $B_{i,k}$ pour $k \leq 2$ et $0 \leq i \leq 3 - k$.

Exercice 3 On pose $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = 1$, $t_5 = 2$, $t_6 = 3$, etc..

Calculer $B_{i,k}$ pour $k \leq 2$ et $0 \leq i \leq 3 - k$.

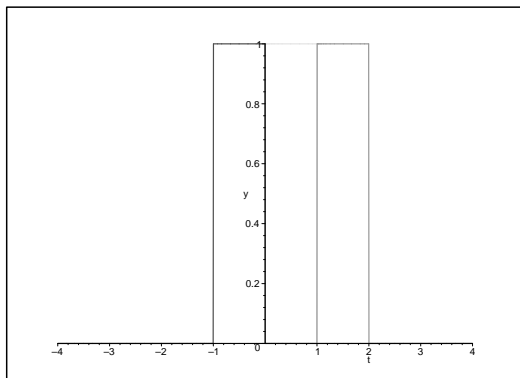
Exercice 4 On pose $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = t_4 = 3$, $t_5 = 4$, $t_6 = 5$, $t_7 = 6$ et $t_8 = 7$.

Calculer $B_{i,k}$ pour $k \leq 2$ et $0 \leq i \leq 5$, ainsi que $B_{0,3}$ et $B_{1,3}$.

Montrer que $\omega_{i,k}(6-t) = 1 - \omega_{7-k-i,k}(t)$. En déduire que (sauf pour t entier si $k = 0$) $B_{i,k}(6-t) = B_{6-k-i,k}(t)$.

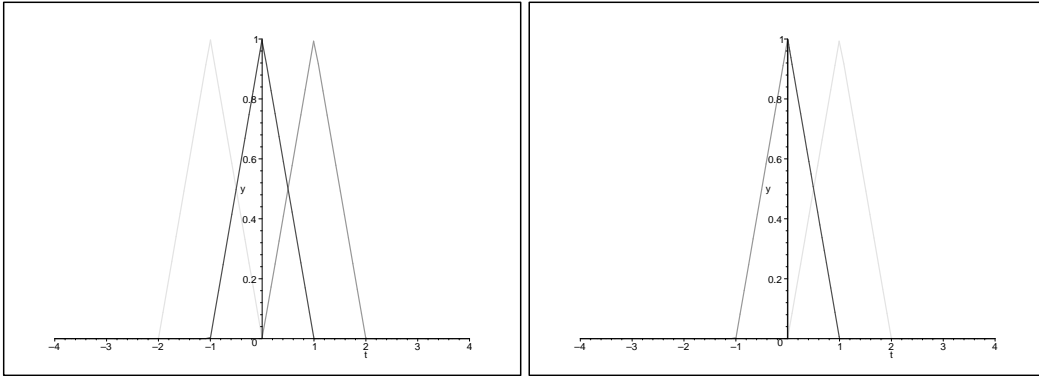
2.5 Graphes de quelques fonctions B-splines

Degré 0



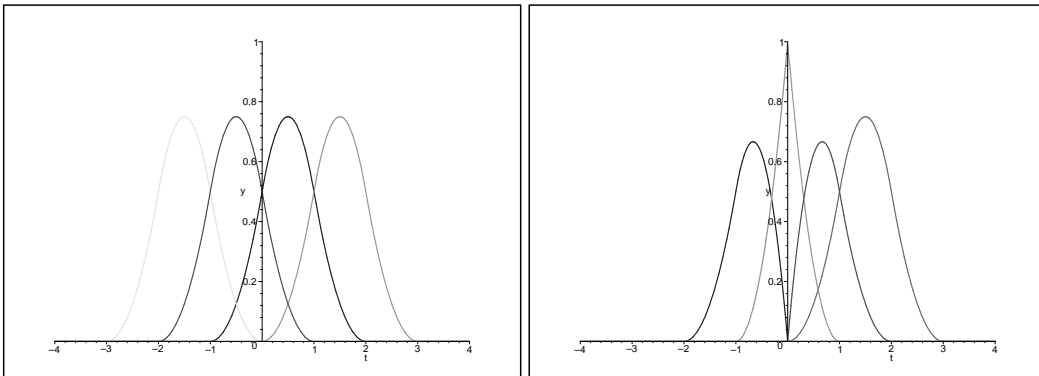
Trois fonctions B-splines uniformes de degré 0

Degré 1

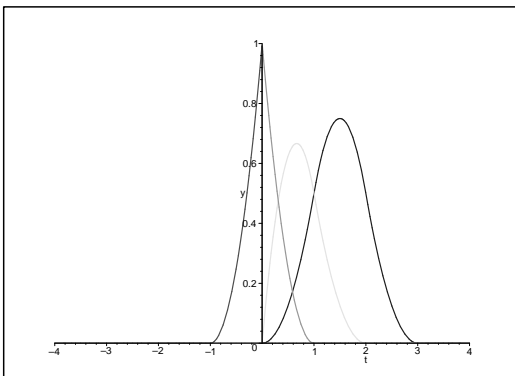


Trois fonctions B-splines de degré 1 uniformes (resp. relatives au vecteur de noeuds $(\dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots)$)

Degré 2

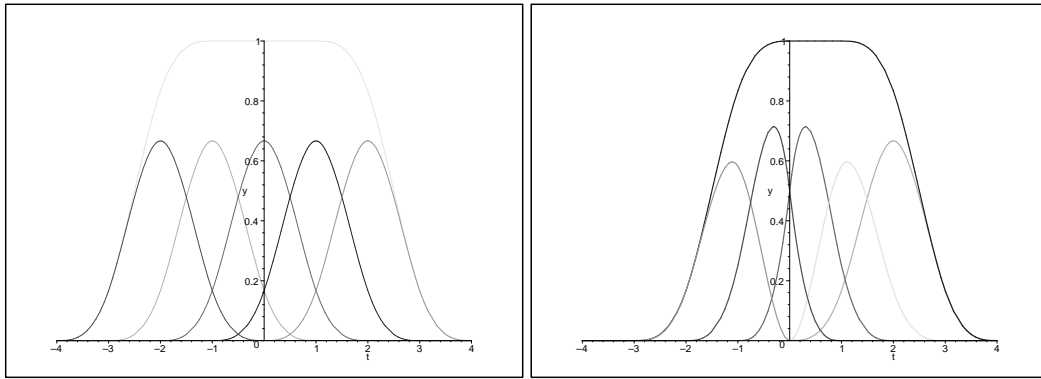


Quatre fonctions B-splines de degré 2 uniformes (resp. relatives au vecteur de noeuds $(\dots - 2, -1, 0, 0, 1, 2, \dots)$)

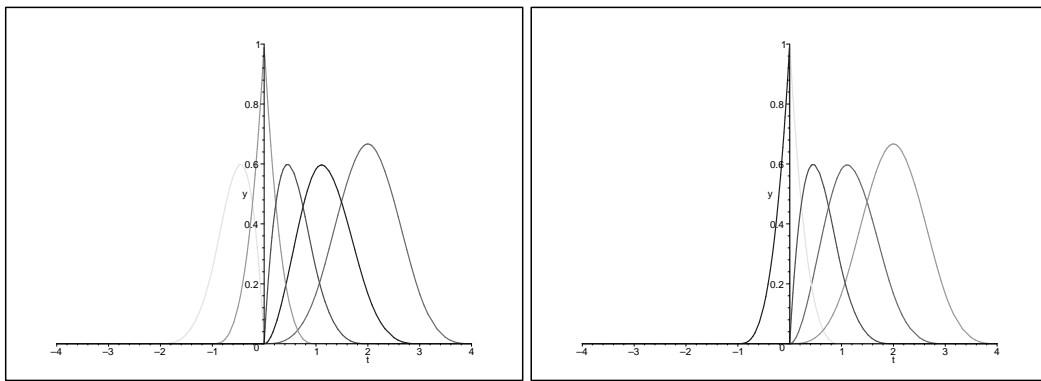


Quatre fonctions B-splines de degré 2 relatives au vecteur de noeuds $(\dots - 2, -1, 0, 0, 1, 2, \dots)$

Degré 3



Cinq fonctions B-splines uniformes (resp. relatives au vecteur de noeuds $(\dots -2, -1, 0, 0, 1, 2, \dots)$) et leur somme



Cinq fonctions B-splines relatives aux vecteurs de noeuds $(-2, -1, 0, 0, 0, 1, 2, \dots)$ et $(-1, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, \dots)$

2.6 Symétries

Toute symétrie du vecteur de noeuds se traduit par des relations entre les fonctions B-splines correspondantes. On l'a vu dans deux cas particuliers (B-splines uniformes et polynômes de Bernstein). Voici un énoncé général.

Proposition 2.4 *On suppose que le vecteur de noeuds \mathbf{t} est périodique, i.e. il existe un entier I et un réel T tels que pour tout $i \in \mathbf{Z}$,*

$$t_{i+I} = t_i + T.$$

Alors les fonctions B-splines correspondantes satisfont

$$B_{i,k}(t - T) = B_{i+I,k}(t)$$

pour tout $i \in \mathbf{Z}$.

Preuve. Par récurrence sur k .

La fonction $t \mapsto B_{i,0}(t - T)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[t_i + T, t_{i+1} + T[= [t_{i+I}, t_{i+I+1}[$, donc elle coïncide avec $B_{i+I,0}$.

D'autre part,

$$\omega_{i,k}(t - T) = \omega_{i+I,k}(t).$$

Supposant connu que pour tout $i \in \mathbf{Z}$,

$$B_{i,k-1}(t - T) = B_{i+I,k-1}(t),$$

il vient

$$\begin{aligned}
B_{i,k}(t-T) &= \omega_{i,k}(t-T)B_{i,k-1}(t-T) + (1 - \omega_{i+1,k}(t-T))B_{i+1,k-1}(t-T) \\
&= \omega_{i+I,k}(t)B_{i+I,k-1}(t) + (1 - \omega_{i+I+1,k}(t))B_{i+I+1,k-1}(t) \\
&= B_{i+I,k}(t)
\end{aligned}$$

pour tout $i \in \mathbf{Z}$. ■

Proposition 2.5 *On suppose que le vecteur de noeuds \mathbf{t} est symétrique par rapport à un réel a , i.e. il existe des entiers I et ℓ tels que pour tout $i = \frac{1}{2}(I - \ell), \dots, \frac{1}{2}(I + \ell)$,*

$$t_{I-i} = 2a - t_i.$$

Alors les fonctions B-splines correspondantes satisfont (sauf peut-être aux noeuds)

$$B_{i,k}(2a - t) = B_{I-i-k-1,k}(t)$$

pour tout $i = \frac{1}{2}(I - \ell), \dots, \frac{1}{2}(I + \ell) - k - 1$.

Preuve. Par récurrence sur k .

Si $i = \frac{1}{2}(I - \ell), \dots, \frac{1}{2}(I + \ell) - 1$, $t \mapsto B_{i,0}(2a - t)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $]2a - t_{i+1}, 2a - t_i] =]t_{I-i-1}, t_{I-i}]$, qui ne diffère de $B_{I-i-1,0}$ qu'aux noeuds t_{I-i-1} et t_{I-i} .

D'autre part,

$$\omega_{i,k}(2a - t) = 1 - \omega_{I-i-k,k}(t).$$

Supposant connu que pour tout $i = \frac{1}{2}(I - \ell), \dots, \frac{1}{2}(I + \ell) - k - 2$,

$$B_{i,k-1}(2a - t) = B_{I-i-k,k-1}(t),$$

il vient

$$\begin{aligned}
B_{i,k}(2a - t) &= \omega_{i,k}(2a - t)B_{i,k-1}(2a - t) + (1 - \omega_{i+1,k}(2a - t))B_{i+1,k-1}(2a - t) \\
&= (1 - \omega_{I-i-k,k}(t))B_{I-i-k,k-1}(t) + \omega_{I-i-k-1,k}(t)B_{I-i-k-1,k-1}(t) \\
&= B_{I-i-k-1,k}(t)
\end{aligned}$$

pour tout $i = \frac{1}{2}(I - \ell), \dots, \frac{1}{2}(I + \ell) - k - 1$. ■

2.7 Principales propriétés

Proposition 2.6 *Propriétés générales des fonctions B-splines.*

1. *La fonction $B_{j,k}$ est sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ un polynôme de degré $\leq k$.*

Support :

2. *la fonction $B_{i,k}$ s'annule en dehors de l'intervalle $[t_i, t_{i+k}[$;*

3. *la fonction $B_{i,k}$ s'annule aussi en t_i sauf si $t_i = t_{i+1} = \dots = t_{i+k} < t_{i+k+1}$ auquel cas $B_{i,k}(t_i) = 1$;*

4. *$0 < B_{i,k}(t) \leq 1$ pour $t \in]t_i, t_{i+k}[$;*

5. *sur l'intervalle $]t_i, t_{i+k}[$, la fonction $B_{i,k}$ ne prend la valeur 1 que si $t_{i+1} = \dots = t_{i+k}$ et en ce point seulement.*

Partition de l'unité :

6. sur l'intervalle $[t_k, t_{m-k}[$, $\sum_{i=0}^{m-k-1} B_{i,k} \equiv 1$.

Différentiabilité :

7. la fonction $B_{i,k}$ est C^∞ à droite de chaque point ;

8. au voisinage d'un noeud de multiplicité r , la fonction $B_{i,k}$ est seulement de classe C^{k-r} .

Preuve. Elle se déroule sur plusieurs paragraphes. La propriété de support se démontre aisément par récurrence sur k .

2.8 Partition de l'unité

Démontrons par récurrence la propriété de partition de l'unité.

Elle est clairement vraie pour $k = 0$. Supposons la établie pour les B-splines de degré $\leq k - 1$. On écrit

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-k-1} B_{i,k} &= \omega_{0,k} B_{0,k-1} + (1 - \omega_{1,k}) B_{1,k-1} + \omega_{1,k} B_{1,k-1} + (1 - \omega_{2,k}) B_{2,k-1} + \cdots + \\ &\quad + \omega_{m-k-1,k} B_{m-k-1,k-1} + (1 - \omega_{m-k,k}) B_{m-k,k-1} \\ &= (-1 + \omega_{0,k}) B_{0,k-1} + \sum_{i=0}^{m-k} B_{i,k-1} (-1 + \omega_{m-k,k}) B_{m-k,k-1}. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, la somme $\sum_{i=0}^{m-k} B_{i,k-1}$ vaut 1 sur l'intervalle $[t_{k-1}, t_{m-k+1}[$, donc *a fortiori* sur $[t_k, t_{m-k}[$. D'après la propriété de support, la fonction $B_{0,k-1}$ est nulle hors de l'intervalle $[t_0, t_k[$ et $B_{m-k,k-1}$ est nulle hors de $[t_{m-k}, t_m[$, donc la somme $\sum_{i=0}^{m-k-1} B_{i,k}$ vaut identiquement 1 sur l'intervalle $[t_k, t_{m-k}[$. Ceci achève la démonstration par récurrence. ■

2.9 Continuité

Si f est une fonction sur \mathbf{R} qui admet des limites à droite et à gauche, notons $f(t+)$ (resp. $f(t-)$) ces limites.

Lemme 2.7 Si $t_{i-1} < t_i = t_{i+1} = \cdots = t_{i+r-1} < t_{i+r}$, alors $B_{i-1,r}(t_\pm) = 1$. Par conséquent, toutes les fonctions $B_{j,k}$ pour $k \geq r$ sont continues en t_i .

Preuve. Montrons par récurrence sur $k \leq r$ que

$$B_{i-1,r}(t_i \pm) = B_{i-1,r-k}(t_i \pm) + B_{i,r-k}(t_i \pm) + \cdots + B_{i-1+k,r-k}(t_i \pm).$$

C'est vrai pour $k = 0$. Supposons l'énoncé démontré pour un entier k . La définition des B-splines donne, pour tout $j = i - 1, \dots, i - 1 + k$,

$$B_{j,r-k}(t_i \pm) = \omega_{j,r-k}(t_i) B_{j,r-k-1}(t_i \pm) + (1 - \omega_{j+1,r-k}(t_i)) B_{j+1,r-k-1}(t_i \pm).$$

Or $\omega_{j,r-k}(t_i) = \frac{t_i - t_j}{t_{j+r-k} - t_j}$ est nul sauf si $j = i - 1$, auquel cas il vaut 1. Il vient

$$B_{i-1,r-k}(t_i \pm) = B_{i-1,r-k-1}(t_i \pm) + B_{i,r-k-1}(t_i \pm).$$

et pour $j = i, i + 1, \dots, i - 1 + k$,

$$B_{j,r-k}(t_i \pm) = B_{j+1,r-k-1}(t_i \pm),$$

d'où, en sommant et avec l'hypothèse de récurrence,

$$B_{i-1,r}(t_i \pm) = B_{i-1,r-k}(t_i \pm) + B_{i,r-k}(t_i \pm) + \cdots + B_{i-1+k,r-k}(t_i \pm).$$

Cela achève la preuve par récurrence.

Pour $k = 0$, on vérifie que $B_{j,0}(t_i+) = 0$ si $j = i-1, \dots, i+r-2$ et $B_{i+r-1,0}(t_i+) = 1$ donc la somme $B_{i-1,r}(t_i+)$ vaut 1. On vérifie que $B_{j,0}(t_i-) = 0$ si $j = i, \dots, i+r-1$ et $B_{i-1,0}(t_i-) = 1$ donc la somme $B_{i-1,r}(t_i-)$ vaut 1. On conclut que $B_{i-1,r}$ est continue en t_i .

Comme les B-splines de degré r sont à valeurs dans $[0, 1]$ et leur somme vaut 1, cela entraîne que toutes ces fonctions sont continues en t_i et toutes sauf $B_{i-1,r}$ s'annulent en t_i . La relation de récurrence qui définit les B-splines montre que les B-splines de degré $\geq r$ sont aussi continues en t_i . Ceci achève la preuve du lemme 2.7. ■

2.10 Différentiabilité

Lemme 2.8 *Pour tout $k \geq 0$, la fonction $B_{i,k}$ est dérivable à droite, de dérivée*

$$B'_{i,k} = k(\omega'_{i,k}B_{i,k-1} - \omega'_{i+1,k}B_{i+1,k-1}).$$

i.e.

$$B'_{i,k}(t) = k\left(\frac{B_{i,k-1}(t)}{t_{i+k} - t_i} - \frac{B_{i+1,k-1}(t)}{t_{i+k+1} - t_{i+1}}\right).$$

Preuve. On raisonne par récurrence sur k . C'est vrai si $k = 0$. Supposons cette formule établie pour les B-splines de degré inférieur ou égal à $k-1$. En dérivant la relation de récurrence qui définit $B_{i,k}$, on obtient

$$B'_{i,k} = \omega'_{i,k}B_{i,k-1} - \omega'_{i+1,k}B_{i+1,k-1} + \omega_{i,k}B'_{i,k-1} + (1 - \omega_{i+1,k})B'_{i+1,k-1}.$$

Avec l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k-1}(\omega_{i,k}B'_{i,k-1} + (1 - \omega_{i+1,k})B'_{i+1,k-1}) &= \omega_{i,k}\omega'_{i,k-1}B_{i,k-2} - \omega_{i,k}\omega'_{i+1,k-1}B_{i+1,k-2} \\ &\quad + (1 - \omega_{i+1,k})\omega'_{i+1,k-1}B_{i+1,k-2} \\ &\quad - (1 - \omega_{i+1,k})\omega'_{i+2,k-1}B_{i+2,k-2}. \end{aligned}$$

Or

$$\omega_{i,k}\omega'_{i,k-1} = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} \frac{1}{t_{i+k-1} - t_i} = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \frac{1}{t_{i+k} - t_i} = \omega_{i,k-1}\omega'_{i,k},$$

$$\begin{aligned} (1 - \omega_{i+1,k})\omega'_{i+2,k-1} &= \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \frac{1}{t_{i+k+1} - t_{i+2}} \\ &= \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \frac{1}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} \\ &= (1 - \omega_{i+2,k-1})\omega'_{i+1,k} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} -\omega_{i,k}\omega'_{i+1,k-1} &+ (1 - \omega_{i+1,k})\omega'_{i+1,k-1} \\ &= \frac{t_i - t}{(t_{i+k} - t_i)(t_{i+k} - t_{i+1})} + \frac{t_{i+k+1} - t}{(t_{i+k+1} - t_{i+1})(t_{i+k} - t_{i+1})} \\ &= \frac{t_{i+k} - t - (t_{i+k} - t_i)}{(t_{i+k} - t_i)(t_{i+k} - t_{i+1})} + \frac{t_{i+1} - t + (t_{i+k+1} - t_{i+1})}{(t_{i+k+1} - t_{i+1})(t_{i+k} - t_{i+1})} \\ &= \frac{t_{i+k} - t}{(t_{i+k} - t_i)(t_{i+k} - t_{i+1})} + \frac{t_{i+1} - t}{(t_{i+k+1} - t_{i+1})(t_{i+k} - t_{i+1})} \\ &= -\omega_{i+1,k-1}\omega'_{i+1,k} + (1 - \omega_{i+1,k-1})\omega'_{i+1,k} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\omega_{i,k}\omega'_{i,k-1}B_{i,k-2} & - \omega_{i,k}\omega'_{i+1,k-1}B_{i+1,k-2} + (1 - \omega_{i+1,k})\omega'_{i+1,k-1}B_{i+1,k-2} \\
& - (1 - \omega_{i+1,k})\omega'_{i+2,k-1}B_{i+2,k-2} \\
& = \omega_{i,k-1}\omega'_{i,k}B_{i,k-2} - \omega_{i+1,k-1}\omega'_{i+1,k}B_{i+1,k-2} + (1 - \omega_{i+1,k-1})\omega'_{i,k}B_{i+1,k-2} \\
& - (1 - \omega_{i+2,k-1})\omega'_{i+1,k}B_{i+2,k-2} \\
& = \omega'_{i,k}(\omega_{i,k-1}B_{i,k-2} + (1 - \omega_{i+1,k-1})B_{i+1,k-2}) - \omega'_{i+1,k}(\omega_{i+1,k-1}B_{i+1,k-2} \\
& + (1 - \omega_{i+2,k-1})B_{i+2,k-2}) \\
& = \omega'_{i,k}B_{i,k-1} - \omega'_{i+1,k}B_{i+1,k-1}.
\end{aligned}$$

En additionnant, il vient

$$B'_{i,k} = k(\omega'_{i,k}B_{i,k-1} - \omega'_{i+1,k}B_{i+1,k-1}).$$

Cela achève la preuve du lemme 2.8. ■

2.11 Fin de la preuve de la proposition 2.6

Le lemme 2.8 démontre l'existence de dérivées à droite de tous ordres.

Si t est un noeud de multiplicité r , alors les B-splines de degré r sont continues en t . Avec le lemme 2.8, cela entraîne que les B-splines de degré $r + 1$ sont de classe C^1 au voisinage de t . Par récurrence, on montre ainsi que les B-splines de degré $k \geq r$ sont de classe C^{k-r} au voisinage d'un noeud de multiplicité r .

Ceci achève la preuve de la proposition 2.6. ■

3 Courbes B-splines et courbes de Bézier

3.1 Définition

Définition 3.1 On se donne un vecteur de noeuds $\mathbf{t} = (t_0, \dots, t_m)$ et des points P_0, \dots, P_m dans \mathbf{R}^n , appelés points de contrôle (control points) qui forment ensemble le polygone de contrôle (control polygon). La courbe B-spline de degré k associée au vecteur de noeuds \mathbf{t} et au polygone de contrôle \mathbf{P} est

$$t \mapsto X_k(t) = \sum_i B_{i,k}(t)P_i.$$

Lorsque le vecteur de noeuds a la forme spéciale $(0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1)$, où 0 et 1 apparaissent chacun $k + 1$ fois, on parle de courbe de Bézier. Dans ce cas, seuls les $k + 1$ premiers points de contrôle jouent un rôle.

Les fonctions intervenant dans les courbes de Bézier sont donc les polynômes de Bernstein de la proposition 2.3.

Théorème 1 La k -ième B-spline $t \mapsto X_k(t)$ a les propriétés suivantes.

1. Les composantes de $X_k(t)$ sont sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$ des polynômes de degré k ;
2. en un noeud de multiplicité r , la courbe est de classe C^{k-r} ;
3. si $t \in [t_i, t_{i+1}[$, $X_k(t)$ ne dépend que des points de contrôle P_{i-k}, \dots, P_i et se trouve dans l'enveloppe convexe de ces points ;
4. si t_i est un noeud simple et $k \geq 1$, $X_k(t_i)$ ne dépend que des points de contrôle P_{i-k}, \dots, P_{i-1} et se trouve dans l'enveloppe convexe de ces points ;
5. si $t_i = \dots = t_{i+k} < t_{i+k+1}$ est un noeud de multiplicité $k + 1$, alors $X_k(t_i) = P_i$ et $X'_k(t_i) = \frac{k}{t_{i+k+1} - t_i}(P_{i+1} - P_i)$;

6. la construction de la courbe X_k à partir des points de contrôle P_i est invariante par application affine.

Preuve. Elle résulte des propriétés des fonctions B-splines, proposition 2.6. On donne seulement les détails pour le point 4. Si $t_0 = t_1 = \dots = t_k = 0 < t_{k+1}$, alors pour tout $i = 0, \dots, k$, $B_{i,k-i}(0) = 1$ et $B_{j,k-i} = 0$ pour $j \neq i$. En particulier $X_k(0) = P_0$ et, d'après le lemme 2.8,

$$X'_k(0) = \frac{k}{t_{k+1} - t_1} (P_1 - P_0). \blacksquare$$

3.2 Points et tangentes remarquables

Terminologie. On dit qu'une courbe B-spline est *vissée aux extrémités* (**clamped**) si elle est de degré k et si les noeuds extrêmes t_0 et t_m sont de multiplicité $k + 1$, i.e. $t_0 = t_1 = \dots = t_k = 0 < t_{k+1}$ et $t_{m-k} = \dots = t_m$. Dans ce cas, le nombre de points de contrôle effectivement utiles est $m - k - 1$.

Il résulte du théorème 1 qu'une courbe vissée aux extrémités est tangente à son polygone de contrôle aux extrémités. Plus précisément

Proposition 3.2 Soit X_k une courbe B-spline de degré k vissée aux extrémités. Alors $X_k(t_0) = P_0$ et $X_k(t_m) = P_{m-k-1}$. Si de plus $P_1 \neq P_0$ (resp. $P_{m-k-2} \neq P_{m-k-1}$), alors la courbe est tangente en P_0 au segment P_0P_1 (resp. $P_{m-k-2}P_{m-k-1}$).

Exercice 5 Cubique passant par deux points donnés avec des tangentes orientées données. Construire un vecteur de noeuds et des points de contrôle (le moins possible) dans le plan de sorte que la B-spline de degré 3 associée passe par les points $M = (1, 0)$ et $N = (3, 0)$ avec en ces deux points une tangente dirigée par $(1, 1)$.

Proposition 3.3 Une B-spline de degré 2 relative à un vecteur de noeuds simple est toujours tangente aux côtés de son polygone de contrôle. Si le polygone de contrôle possède trois sommets consécutifs P_i, P_{i-1} et P_{i-2} alignés sur une même droite D , alors la courbe B-spline cubique correspondante X_3 est tangente à D en $t = t_{i+1}$.

Preuve. En t_{i+1} , seules deux fonctions B-splines de degré 2 sont non nulles, $B_{i,2}$ et $B_{i-1,2}$. Par conséquent $X_2(t_{i+1})$ est dans l'enveloppe convexe de P_i et P_{i-1} , i.e. sur le segment $P_{i-1}P_i$. D'après le lemme 2.8, le vecteur vitesse s'écrit

$$X'_2(t_{i+1}) = \sum_j \frac{2}{t_{j+2} - t_j} B_{j,1}(t_{i+1})(P_j - P_{j-1}).$$

or en t_{i+1} , une seule B-spline de degré 1 est non nulle, c'est $B_{i,1}$, donc le vecteur vitesse est positivement colinéaire à $P_{i-1}P_i$, i.e. la courbe est tangente au côté du polygone de contrôle.

En t_{i+1} , seules trois fonctions B-splines de degré 3 sont non nulles, $B_{i,3}$, $B_{i-1,3}$ et $B_{i-2,3}$. Par conséquent $X_3(t_{i+1})$ est dans l'enveloppe convexe de P_i, P_{i-1} et P_{i-2} . Si ces trois points sont alignés, $X_3(t_{i+1})$ est sur la droite qui les porte. D'après le lemme 2.8, le vecteur vitesse s'écrit

$$X'_3(t_{i+1}) = \sum_j \frac{3}{t_{j+3} - t_j} B_{j,2}(t_{i+1})(P_j - P_{j-1}).$$

or en t_{i+1} , seulement deux B-splines de degré 2 sont non nulles, ce sont $B_{i,2}$ et $B_{i-1,2}$, donc le vecteur vitesse est une combinaison de $P_i - P_{i-1}$ et de $P_{i-1} - P_{i-2}$. Or ces vecteurs sont colinéaires. On conclut que de nouveau la courbe est tangente au côté du polygone de contrôle. \blacksquare

3.3 Périodicité

Proposition 3.4 *Si on se donne un vecteur de noeuds et un polygone de contrôle périodiques, i.e. tels qu'il existe $I \in \mathbf{N}$ et $T \in \mathbf{R}$ tels que $t_{i+I} = t_i + T$ et $P_{i+I} = P_i$, alors les courbes B-splines correspondantes sont périodiques, i.e. pour tout entier k et tout $t \in \mathbf{R}$, $X_k(t + T) = X_k(t)$.*

Preuve. D'après la proposition 2.4, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} X_k(t - T) &= \sum_{i \in \mathbf{Z}} B_{i,k}(t - T) P_i \\ &= \sum_{i \in \mathbf{Z}} B_{i+I,k}(t) P_i \\ &= \sum_{j \in \mathbf{Z}} B_{j,k}(t) P_{j-I} \\ &= \sum_{j \in \mathbf{Z}} B_{j,k}(t) P_j \\ &= X_k(t). \blacksquare \end{aligned}$$

Exercice 6 *Construire une courbe B-spline périodique de classe C^2 tangente aux côtés du carré de sommets $O = (0, 0)$, $P = (2, 0)$, $Q = (2, 2)$ et $R = (0, 2)$. Est-ce un cercle ?*

3.4 Symétries

Toute symétrie du polygone de contrôle compatible avec une symétrie du vecteur de noeuds (toujours satisfaite pour les vecteurs de noeuds utilisés par DesignMentor par exemple) se traduit par une symétrie de la courbe.

Proposition 3.5 *Soit σ une symétrie du polygone de contrôle qui préserve l'ordre des sommets, i.e. une transformation affine telle que $\sigma(P_i) = P_{i+I}$. Si le vecteur de noeuds est lui aussi périodique, i.e. $t_{i+I} = t_i + T$, alors la courbe B-spline de degré k associée l'est aussi,*

$$\sigma(X_k(t)) = X_k(t + T).$$

Preuve. D'après la proposition 2.4, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \sigma(X_k(t)) &= \sum_{i \in \mathbf{Z}} B_{i,k}(t) \sigma(P_i) \\ &= \sum_{i \in \mathbf{Z}} B_{i,k}(t) P_{i+I} \\ &= \sum_{j \in \mathbf{Z}} B_{j-I,k}(t) P_j \\ &= \sum_{j \in \mathbf{Z}} B_{j,k}(t + T) P_j \\ &= X_k(t + T). \blacksquare \end{aligned}$$

Exercice 7 *Soit X_3 la courbe B-spline uniforme périodique de degré 3 ayant le carré unité pour polygone de contrôle. Montrer qu'elle est invariante par les rotations d'ordre 4 autour du point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. En déduire que l'une de ses homothétiques est tangente aux 4 côtés du carré. Est-ce un cercle ?*

Proposition 3.6 *Soit σ une symétrie du polygone de contrôle qui renverse l'ordre des sommets, i.e. une transformation affine telle que $\sigma(P_i) = P_{I-i}$. Si le vecteur de noeuds est lui aussi*

périodique, i.e. $t_{m-i} = 2a - t_i$ pour $i = 0, \dots, m$, où $m = I + k + 1$, alors la courbe B-spline de degré k associée l'est aussi,

$$\sigma(X_k(t)) = X_k(2a - t)$$

pour tout $t \in [t_k, t_I[$.

Preuve. Pour $t \in [t_k, t_I[$,

$$\begin{aligned} \sigma(X_k(t)) &= \sum_0^I B_{i,k}(t) \sigma(P_i) \\ &= \sum_0^I B_{i,k}(t) P_{I-i} \\ &= \sum_0^I B_{I-j,k}(t) P_j \\ &= \sum_0^I B_{m-k-1-j,k}(t) P_j \\ &= \sum_0^I B_{j,k}(2a - t) P_j \\ &= X_k(2a - t). \end{aligned}$$

(on a appliqué la proposition 2.5 avec $\ell = I$). ■

Remarque. DesignMentor n'utilise que deux types de vecteurs de noeuds, le vecteur uniforme (pour les courbes périodiques) ou des vecteurs avec des noeuds simples régulièrement espacés à l'exception des noeuds extrêmes de multiplicité $k + 1$ (pour les courbes vissées aux extrémités). Dans les deux cas, la condition de symétrie demandée est satisfaite.

Exercice 8 On reprend la courbe de l'exercice 7. Montrer qu'elle est symétrique par rapport aux diagonales et aux médianes du carré. En déduire la position des points $X_3(i)$, $i \in \mathbf{Z}$.

Exercice 9 On reprend la courbe de l'exercice 5. Montrer qu'elle admet une symétrie centrale.

3.5 Continuité par rapport à l'ensemble des paramètres

Proposition 3.7 Soit $V_r \subset \mathbf{R}^{m+1}$ l'ensemble des couples (\mathbf{t}, t) où \mathbf{t} est un vecteur de noeud et t n'est pas un noeud de multiplicité $\geq r$. Pour $k \geq r$ et $s \leq k - r$, l'application définie sur $V_r \times \mathbf{R}^{nm}$ qui à un vecteur de noeuds \mathbf{k} , un temps t et un polygone de contrôle \mathbf{P} associe la dérivée s -ième $X_k^{(s)}(t) \in \mathbf{R}^n$ est continue.

Preuve. Comme $X_k^{(s)}(t)$ dépend linéairement du polygone de contrôle \mathbf{P} , il suffit de montrer que les coefficients, i.e. les fonctions B-splines et leurs dérivées, dépendent continûment de (\mathbf{t}, t) .

La formule 2.8 pour la dérivée permet de se ramener au cas où $s = 0$. En effet, les dénominateurs figurant dans cette formule ne s'annulent pas sur V_r .

Désormais $s = 0$. Soit $\mathbf{t}^\alpha, t^\alpha$, une suite de vecteurs de noeuds et de temps convergeant vers $(\mathbf{t}, t) \in V_r$. Supposons que $t \in]t_\ell, t_{\ell+1}[$ n'est pas un noeud de \mathbf{t} . Soit $i \in \{0, \dots, m\}$ et $j \leq k$. Sur tout segment contenu dans $]t_\ell, t_{\ell+1}[$, les fonctions B_{i,j,t^α} sont pour α assez grand des polynômes de degré inférieur ou égal à k , à valeurs dans $[0, 1]$, donc quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer qu'ils convergent uniformément vers une fonction $C_{i,j}$. On obtient ainsi une famille de fonctions $C_{i,j}$ qui satisfont aux mêmes relations de récurrence que les B-splines. Les fonctions $C_{i,0}$, limites de fonctions constantes, sont constantes, valent 0 ou 1, une seule vaut 1 (leur somme vaut

1), c'est $C_{\ell,0}$. On conclut que $C_{i,j} = B_{i,j}$ est la B-spline associée au vecteur de noeuds \mathbf{t} . Ceci prouve la continuité.

Supposons désormais que t est un noeud de multiplicité $r' \leq r$ de \mathbf{t} , $t = t_{\ell-r'+1} = \dots = t_{\ell} = t < t_{\ell+1}$. Sur tout segment $[a, b]$ contenu dans $]t_{\ell}, t_{\ell+1}[$, on peut supposer que chaque polynôme $B_{i,j,t^{\alpha}}$ (α assez grand) converge uniformément vers une fonction $C_{i,j}$. De nouveau, les relations de récurrence et les conditions initiales sont satisfaites, donc $C_{i,j}$ coïncide sur $[a, b]$ avec la B-spline $B_{i,j}$ associée au vecteur de noeuds \mathbf{t} . La suite de l'argument suit la preuve du lemme 2.7. Par hypothèse, r' noeuds (en comptant les multiplicités) $t_{\ell-r'+1}^{\alpha}, \dots, t_{\ell}^{\alpha}$ et t^{α} convergent vers t . Comme en 2.7, on montre que

$$B_{\ell-r',r',t^{\alpha}}(t^{\alpha}) - B_{\ell-r'+1,0,t^{\alpha}}(t^{\alpha}) - B_{\ell-r'+2,0,t^{\alpha}}(t^{\alpha}) - \dots - B_{\ell,0,t^{\alpha}}(t^{\alpha})$$

tend vers 0. Or $B_{\ell,0,t^{\alpha}}(t^{\alpha})$ vaut 0 ou 1. Ceci prouve que $B_{\ell-r',r',t^{\alpha}}(t^{\alpha})$ tend vers $1 = B_{\ell-r',r'}(t)$ et que pour $i \neq \ell - r'$, $B_{i,r',t^{\alpha}}(t^{\alpha})$ tend vers $0 = B_{i,r'}(t)$. Ceci prouve la continuité de $(\mathbf{t}, t) \mapsto X_{r'}(t)$. Les relations de récurrence montrent alors que $(\mathbf{t}, t) \mapsto X_k(t)$ est continue pour $k \geq r'$. En effet, les dénominateurs présents dans les formules ne tendent pas vers 0. ■

Interprétation. Que se passe-t-il lorsqu'on déforme le vecteur de noeuds ? Si k noeuds se rapprochent les uns des autres, la courbe va passer de plus en plus près d'un point de contrôle.

4 Algorithmes

4.1 Algorithme de de Casteljau

Pour calculer et tracer une courbe B-spline, plutôt qu'il s'agit de calculer symboliquement les fonctions B-splines, de les évaluer et calculer les combinaisons convexes de points de contrôle, il est plus efficace de partir des points de contrôle et d'effectuer des combinaisons convexes successives avec des poids linéaires en t , comme dans le schéma de Horner.

On se souvient que $X_k(t)$ coïncide avec la valeur en t de la courbe B-spline de degré $k - 1$ associée au polygone de contrôle $P_i(t) = \omega_{i,k}(t)P_{i-1} + (1 - \omega_{i,k}(t))P_i$. C'est le point de départ de l'algorithme attribué à de Casteljau.

Proposition 4.1 *On fixe un vecteur de noeuds \mathbf{t} et un polygone de contrôle \mathbf{P} . On cherche à calculer la courbe B-spline X_k de degré k correspondante.*

Soit $t \in [t_i, t_{i+1}[$. On pose $P_j^0 = P_j$ pour $i - k \leq j \leq i$. Puis, pour $r = 0, \dots, k - 1$, on pose

$$P_j^{r+1} = \omega_{j,k-r}(t)P_j^r + (1 - \omega_{j,k-r}(t))P_{j-1}^r$$

pour $i - k + r + 1 \leq j \leq i$. Alors $P_i^k = X_k(t)$.

Pratiquement, on peut disposer les points P_j^r en triangle. Par exemple, si $k = 3$ et $t \in [t_4, t_5[$, on écrit

$$\begin{array}{cccccc} P_1 & & P_2 & & P_3 & & P_4 \\ & & P_2^1 & & P_3^1 & & P_4^1 \\ & & & & P_3^2 & & P_4^2 \\ & & & & & & P_4^3 \end{array}$$

et chaque valeur de la $r + 1$ -ième ligne s'obtient en faisant une combinaison convexe des deux valeurs situées juste au-dessus affectées des poids respectifs $1 - \omega_{j,k-r}(t)$ (pour celui de gauche) et $\omega_{j,k-r}(t)$ (pour celui de droite).

Géométriquement, on place les points P_j^1 sur les côtés du polygone de contrôle. Cela donne un nouveau polygone. On place les points P_j^2 sur les côtés de ce polygone. Cela donne un troisième polygone, sur un côté duquel on trouve $P_i^3 = X_3(t)$.

Cas des courbes de Bézier. Dans ce cas particulier, les $\omega_{j,k}(t)$ qui interviennent valent tous t .

En effet, la courbe X_k est paramétrée par l'intervalle $[0, 1[= [t_k, t_{k+1}[$, donc on peut poser $i = k$. Pour tout $r = 0, \dots, k-1$ et $j = i - k + r + 1 = r + 1, \dots, i$, $t_{j+k-r} = 1$ et $t_j = 0$ donc $\omega_{j,3-r} = t$.

Exercice 10 Soit $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = t_5 = t_6 = t_7 = 1$, $P_0 = (1, 0)$, $P_1 = (2, 1)$, $P_2 = (2, -1)$, $P_3 = (3, 0)$. Au moyen de l'algorithme de de Casteljau, calculer $X_3(t)$ pour $t \in [0, 1[$. Faire la construction géométrique pour $t = 1/2$ et $t = 1/4$.

Comme tous les $\omega_{j,3-r}$ valent t , il vient

$$\begin{array}{cccc} P_0 & & P_1 & & P_2 & & P_3 \\ (1-t)P_0 + tP_1 & & (1-t)P_1 + tP_2 & & (1-t)P_2 + tP_3 & & \\ (1-t)^2P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2P_2 & & (1-t)^2P_1 + 2t(1-t)P_2 + t^2P_3 & & & & \\ (1-t)^3P_0 + 3t(1-t)^2P_1 + 3t^2(1-t)P_2 + t^3P_3 & & & & & & \end{array}$$

d'où

$$X_3(t) = ((1-t)^3 + 6t(1-t)^2 + 6t^2(1-t) + 3t^3, 3t(1-t)^2 - 3t^2(1-t)) = (1 + 3t - 3t^2 + 2t^3, 3t - 9t^2 + 6t^3).$$

Construction géométrique : elle donne pour $X_3(1/2)$ le centre du carré et pour tangente une médiane du carré.

Exercice 11 Construire une courbe de classe C^2 reliant $P = (-2, 0)$ à $Q = (2, 0)$ avec tangente horizontale aux extrémités, en forme de bosse (resp. de boucle).

4.2 Calcul de la dérivée

Proposition 4.2 On fixe un vecteur de noeuds \mathbf{t} et un polygone de contrôle \mathbf{P} . Les dérivées successives de la courbe B-spline X_k de degré k correspondante s'obtiennent comme suit.

Soit $t \in [t_i, t_{i+1}[$. On pose $Q_j^0 = P_j$ pour $i - k \leq j \leq i$. Puis, pour $r = 0, \dots, k-1$, on pose

$$Q_j^{r+1} = (k-r) \frac{1}{t_{j+k-r} - t_j} (Q_j^r - Q_{j-1}^r)$$

pour $i - k + r + 1 \leq j \leq i$ (la convention $Q_j^{r+1} = 0$ si le dénominateur est nul est en vigueur). Alors la dérivée r -ième de X_k au point t vaut

$$X_k^{(r)}(t) = \sum_j B_{j,k-r}(t) Q_j^r.$$

Preuve. Par récurrence sur r à partir du lemme 2.8. ■

Une fois calculés les Q_j^r , on emploie l'algorithme de de Casteljau pour calculer $X_k^{(r)}(t)$.

Exercice 12 Soit $t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = 0$, $t_4 = t_5 = t_6 = t_7 = 1$, $P_0 = (1, 0)$, $P_1 = (2, 1)$, $P_2 = (2, -1)$, $P_3 = (3, 0)$. Au moyen de l'algorithme de de Casteljau, calculer la dérivée $X_3'(t)$ pour $t \in [0, 1[$.

Il vient $Q_j^1 = 3(P_j - P_{j-1})$ Comme tous les $\omega_{j,3-r}$ valent t , il vient

$$\begin{array}{ccc} 3(P_1 - P_0) & & 3(P_2 - P_1) & & 3(P_3 - P_2) \\ -3(1-t)P_0 + 3(1-2t)P_1 + 3tP_2 & & -3(1-t)P_1 + 3(1-2t)P_2 + 3tP_3 & & \\ -3(1-t)^2P_0 + 3(1-4t+3t^2)P_1 + 3(2t-3t^2)P_2 + 3t^2P_3 & & & & \end{array}$$

Soit

$$\begin{aligned} X_3'(t) &= -3(1-t)^2(1, 0) + 3(1-4t+3t^2)(2, 1) + 3(2t-3t^2)(2, -1) + 3t^2(3, 0) \\ &= (3-6t+6t^2, 3-18t+18t^2). \end{aligned}$$

4.3 Ajout d'un noeud

Ajouter un noeud consiste à se donner un nouveau noeud \hat{t} et à calculer un nouveau polygone de contrôle qui donne la même courbe B-spline de degré k . Si l'utilisateur se sent à l'étroit, cette procédure met à sa disposition un paramètre supplémentaire : le polygone de contrôle fourni par la machine comporte un sommet supplémentaire, que l'utilisateur pourra ensuite déplacer à sa guise.

Proposition 4.3 *Soit \mathbf{t} un vecteur de noeud et \mathbf{P} un polygone de contrôle, soit $t \mapsto X_k(t)$ la courbe B-spline de degré k correspondante. Soit \hat{t} un noeud supplémentaire, $\hat{t} \in [t_j, t_{j+1}[$. On pose*

$$\begin{aligned} &= P_i \quad \text{si } t_{i+k} \leq \hat{t}; \\ \hat{P}_i &= (1 - \omega_{i,k}(\hat{t}))P_{i-1} + \omega_{i,k}(\hat{t})P_i \quad \text{si } t_i < \hat{t} < t_{i+k}; \\ &= P_{i-1} \quad \text{si } \hat{t} \leq t_i. \end{aligned}$$

Soit \hat{X}_k la courbe B-spline de degré k associée au vecteur de noeuds $\hat{\mathbf{t}} = (t_0, \dots, t_j, \hat{t}, t_{j+1}, \dots, t_m)$ et au polygone de contrôle $\hat{\mathbf{P}}$. Alors pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\hat{X}_k(t) = X_k(t).$$

Preuve. Fixons $t \in \mathbf{R}$. Il suffit de vérifier que l'opération $\mathbf{P} \mapsto \hat{\mathbf{P}}$ décrite dans l'énoncé commute avec l'opération $\mathbf{P} \mapsto \mathbf{P}^1$ de l'algorithme de de Casteljau. En effet, $X_k(t)$ (resp. $\hat{X}_k(t)$) est la valeur en t de la courbe B-spline de degré $k-1$ associée à \mathbf{t} et \mathbf{P}^1 (resp. à $\hat{\mathbf{t}}$ et $(\hat{\mathbf{P}})^1$). Si on sait montrer que $\hat{\mathbf{P}}^1 = (\hat{\mathbf{P}}^1)$, une récurrence sur k permet de conclure.

Supposons que $t_i < \hat{t} < t_{i+k-1}$. On se rappelle (et on le fait apparaître dans la notation) que $P_i^1 = P_i^1(t)$ dépend de t et que l'opération $\mathbf{P} \mapsto \hat{\mathbf{P}}$ est relative à un degré de B-spline, qui vaut k quand elle s'applique à \mathbf{P} mais $k-1$ quand elle s'applique à \mathbf{P}^1 . On doit comparer

$$\begin{aligned} (\hat{P}_i^1(t)) &= (1 - \omega_{i,k-1}(\hat{t}))P_{i-1}^1(t) + \omega_{i,k-1}(\hat{t})P_i^1(t) \\ &= (1 - \omega_{i,k-1}(\hat{t}))(1 - \omega_{i-1,k}(t))P_{i-2} \\ &\quad + ((1 - \omega_{i,k-1}(\hat{t}))\omega_{i-1,k}(t) + (1 - \omega_{i-1,k}(t))\omega_{i,k-1}(\hat{t}))P_{i-1} \\ &\quad + \omega_{i,k-1}(\hat{t})\omega_{i,k}(t)P_i. \end{aligned}$$

à

$$\begin{aligned} (\hat{P}_i)^1(t) &= (1 - \hat{\omega}_{i,k}(t))(1 - \omega_{i-1,k}(\hat{t}))P_{i-2} \\ &\quad + ((1 - \hat{\omega}_{i,k}(t))\omega_{i-1,k}(\hat{t}) + (1 - \omega_{i-1,k}(\hat{t}))\hat{\omega}_{i,k}(t))P_{i-1} \\ &\quad + \hat{\omega}_{i,k}(t)\omega_{i,k}(\hat{t})P_i, \end{aligned}$$

où

$$\hat{\omega}_{i,k}(t) = \frac{t - \hat{t}_i}{\hat{t}_{i+k} - \hat{t}_i} = \omega_{i,k-1}(t)$$

car on a supposé que $t_i < \hat{t} < t_{i+k-1}$. Or

$$\begin{aligned} (1 - \omega_{i,k-1}(\hat{t}))(1 - \omega_{i-1,k}(t)) &= \frac{(t_{i+k-1} - \hat{t})(t_{i+k-1} - t)}{(t_{i+k-1} - t_i)(t_{i+k-1} - t_{i-1})} \\ &= (1 - \omega_{i,k-1}(t))(1 - \omega_{i-1,k}(\hat{t})) \\ &= (1 - \hat{\omega}_{i,k}(t))(1 - \omega_{i-1,k}(\hat{t})), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1 - \omega_{i,k-1}(\hat{t}))\omega_{i-1,k}(t) &+ (1 - \omega_{i,k-1}(\hat{t}))\omega_{i,k}(t) \\
&= \frac{(t_{i+k-1} - \hat{t})(t - t_{i-1})}{(t_{i+k-1} - t_i)(t_{i+k-1} - t_{i-1})} \\
&\quad + \frac{(t_{i+k-1} - \hat{t})(t - t_i)}{(t_{i+k-1} - t_i)(t_{i+k} - t_i)} \\
&= \frac{(t_{i+k-1} - t)(\hat{t} - t_{i-1})}{(t_{i+k-1} - t_i)(t_{i+k-1} - t_{i-1})} \\
&\quad + \frac{(t_{i+k-1} - \hat{t})(t - t_i)}{(t_{i+k-1} - t_{i-1})(t_{i+k-1} - t_i)} \\
&= ((1 - \omega_{i,k-1}(t))\omega_{i-1,k}(\hat{t}) + (1 - \omega_{i-1,k}(\hat{t}))\omega_{i,k-1}(t)) \\
&= (1 - \hat{\omega}_{i,k}(t))\omega_{i-1,k}(\hat{t}) + (1 - \omega_{i-1,k}(\hat{t}))\hat{\omega}_{i,k}(t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{i,k-1}(\hat{t})\omega_{i,k}(t) &= \frac{(\hat{t} - t_i)(t - t_i)}{(t_{i+k-1} - t_i)(t_{i+k} - t_i)} \\
&= \omega_{i,k-1}(t)\omega_{i,k}(\hat{t}) \\
&= \hat{\omega}_{i,k}(t)\omega_{i,k}(\hat{t}).
\end{aligned}$$

donc

$$\hat{(P_i^1)}(t) = (\hat{P}_i)^1(t)$$

dans ce cas. On laisse au lecteur le soin de compléter la vérification dans les cas où $\hat{t} \leq t_i$ ou $\hat{t} \geq t_{i+k-1}$. ■

Construction géométrique.

Ca ressemble à la première étape de l'algorithme de de Casteljaou. Voir des figures dans les ouvrages [HL], paragraphe 4.4 page 127 ou [F] page .

4.4 Subdivision

On a construit une courbe B-spline X_k à partir d'un vecteur de noeuds \mathbf{t} et d'une polygone de contrôle \mathbf{P} . On est satisfait du résultat obtenu sur l'intervalle $[t_0, \tau]$ mais pas sur l'intervalle $[\tau, t_m]$. On voudrait pouvoir modifier la courbe sur le second intervalle, sans intervenir sur le premier.

Recette. On insère le noeud τ $k + 1$ fois.

Cela ne change pas la courbe, mais désormais les deux moitiés de courbe sont indépendantes. En effet, les fonctions B-splines de degré k relatives à un vecteur de noeuds qui comporte un noeud τ de multiplicité $k + 1$ ont leur support contenu dans $[t_0, \tau]$ ou dans $[\tau, t_m]$.

5 Convexité

5.1 Diminution de la variation

Soit H un hyperplan de \mathbf{R}^n d'équation $\{u \cdot (x - P) = 0\}$. On appelle *variation* d'une courbe $t \mapsto X(t)$, $t \in [a, b]$, par rapport à H le nombre de changements de signe de la fonction $t \mapsto u \cdot (X(t) - P)$ sur $[a, b]$. On la note abusivement $\#(X \cap H)$. La variation d'un polygone \mathbf{P} par rapport à l'hyperplan H est la variation de la courbe affine par morceaux correspondante.

Cette notion s'étend aux courbes (et polygones) périodiques. On compte les changements de signe dans une période.

Proposition 5.1 *Soit H un hyperplan de \mathbf{R}^n . Soit X_k la courbe B-spline associée au polygone de contrôle \mathbf{P} , restreinte à l'intervalle $[t_k, t_{m-k}]$ (pas de restriction dans le cas d'un polygone et d'un vecteur de noeuds périodiques). Alors*

$$\#(X_k \cap H) \leq \#(\mathbf{P} \cap H).$$

Preuve.

Insérons un noeud. Le polygone \mathbf{P} est remplacé par un nouveau polygone \mathbf{P}^1 tel que $\#(\mathbf{P}^1 \cap H) \leq \#(\mathbf{P} \cap H)$. En effet, chaque sommet P'_i de \mathbf{P}^1 se trouve sur un côté $[P_{i-1}, P_i]$ de \mathbf{P} . Si le côté $[P_i^1, P_{i+1}^1]$ de \mathbf{P}^1 coupe H , nécessairement l'un des segments $[P_i^1, P_i]$ ou $[P_i, P_{i+1}^1]$ le coupe aussi. Or \mathbf{P} est la réunion de ces paires de segments.

Soient $t_k < s_0 < \dots < s_v < t_{m-k}$ des valeurs du paramètre telles que les points $X_k(s_j)$ soient de part et d'autre de H . Insérons k noeuds en chacune des valeurs s_0, \dots, s_v . On obtient une courbe B-spline X_k de degré k qui paramètre γ , et dont le polygone de contrôle \mathbf{P}' satisfait $\#(\mathbf{P}' \cap H) \leq \#(\mathbf{P} \cap H)$. Comme s_i est un noeud de multiplicité k , le point $X_k(s_i)$ est un sommet $P'_{j(i)}$ du polygone \mathbf{P}' . Comme $X_k([s_i, s_{i+1}])$ coupe H , la portion de \mathbf{P}' comprise entre $P'_{j(i)}$ et $P'_{j(i+1)}$ coupe aussi H . On conclut que

$$\#(\gamma \cap H) = v \leq \#(\mathbf{P}' \cap H) \leq \#(\mathbf{P} \cap H). \blacksquare$$

5.2 Convexité dans le plan

Terminologie. On dira qu'une courbe plane est *convexe* si elle est contenue dans le bord d'un convexe.

Lemme 5.2 *Une courbe plane lisse par morceaux est convexe si et seulement si toute droite transverse la coupe en au plus deux points.*

Preuve. Soit γ une courbe plane lisse par morceaux et convexe, i.e. contenue dans le bord d'un convexe C . Soit D une droite transverse à γ , i.e. D coupe γ en des points lisses et en ces points, γ n'est pas tangente à D . Alors $\partial_D(C \cap D) = (\partial C) \cap D$. Or $C \cap D$ est convexe, donc c'est un intervalle de D , et son bord (qui contient $\gamma \cap D$) a au plus deux points.

Inversement, soit γ une courbe plane lisse par morceaux. Notons C son enveloppe convexe. Supposons que toute droite transverse coupe γ en au plus deux points. Montrons par l'absurde que γ est contenu dans le bord de C . Supposons qu'il existe un point M de γ qui est intérieur à C . Alors M est barycentre à coefficients strictement positifs de points de γ , donc est intérieur à un triangle dont les sommets P, Q et R sont sur γ . On peut déplacer légèrement ces points sur γ en conservant le fait que M est à l'intérieur du triangle PQR . On peut donc supposer (voir cours de topologie) que les droites PQ, QR et RP sont transverses à γ .

Les points P, Q et R délimitent 4 arcs le long de la courbe γ , et M se trouve ou bien entre deux des points P, Q et R , ou bien sur l'une des extrémités libres.

Dans le premier cas, convenons que M se trouve sur l'arc délimité par P et Q . Par hypothèse, la droite PQ coupe γ en au plus deux points, donc en P et en Q seulement. Par conséquent, l'intérieur de l'arc de courbe de P à Q est du même côté de la droite PQ que M , i.e., du même côté que R . Par transversalité, la courbe traverse la droite en P et en Q donc la droite PQ sépare R des autres arcs délimités sur γ par P et Q . Or l'un de ces arcs contient R , contradiction.

Dans le second cas, convenons qu'en parcourant γ on rencontre successivement M, P, Q et R . Comme γ ne coupe la droite PR qu'en P et R , l'arc PR de γ est d'un seul côté de la droite PR , i.e. la droite PR sépare Q de l'arc PR , contradiction.

On conclut que tout point de γ est sur le bord de C , donc γ est convexe. \blacksquare

Corollaire 5.3 *Si le polygone de contrôle est plan et convexe, alors la courbe B-spline associée est convexe.*

Exercice 13 *Montrer qu'aucune courbe convexe ne satisfait les conditions aux limites de l'exercice 5. Construire une solution de l'exercice 5 qui coupe toute droite en au plus 3 points.*

6 Courbure et condition de raccord

Proposition 6.1 Soit γ la courbe B-spline de degré $k \geq 2$ associée à un vecteur de noeuds \mathbf{t} tel que $t_0 = \dots = t_k < t_{k+1}$ et à un polygone de contrôle \mathbf{P} tel que $P_0 \neq P_1$. Notons c la longueur du côté P_0P_1 et A l'aire du triangle de sommets P_0, P_1 et P_2 (elle a un signe dans le cas des courbes tracées dans un plan orienté). Alors la courbe γ a pour origine P_0 . Sa tangente en ce point est la demi-droite P_0P_1 et sa courbure en ce point est

$$\kappa = \frac{k-1}{k} \frac{t_{k+1} - t_k}{t_{k+2} - t_k} \frac{2A}{c^3}.$$

Si $A \neq 0$, le plan osculateur en P_0 est le plan contenant P_0, P_1 et P_2 .

Supposons $A \neq 0$ et $k \geq 3$. Alors la torsion de la courbe au point P_0 vaut

$$\theta = \frac{k-2}{k} \frac{t_{k+1} - t_k}{t_{k+3} - t_k} \frac{3V}{2A^2}$$

où V est le volume du simplexe de sommets P_0, P_1, P_2 et P_3 .

Preuve. D'après la proposition 2.6, comme t_0 est un noeud de multiplicité k ,

$$B_{0,k}(t_0) = B_{1,k-1}(t_0) = B_{2,k-2}(t_0) = 1$$

et les autres $B_{j,\ell}$, $\ell = k-2, k-1, k$ sont nulles en t_0 . D'après la proposition 4.2,

$$X_k^{(r)}(t_0) = \sum_j B_{j,k-r}(t_0) Q_j^r = Q_r^r$$

où $Q_j^0 = P_j$ et

$$Q_j^{r+1} = (k-r) \frac{1}{t_{j+k-r} - t_j} (Q_j^r - Q_{j-1}^r)$$

Il vient $X_k(t_0) = Q_0^0 = P_0$,

$$X_k'(t_0) = Q_1^1 = \frac{k}{t_{k+1} - t_1} (P_1 - P_0)$$

et

$$X_k''(t_0) = Q_2^2 = \frac{k-1}{t_{k+1} - t_2} (Q_2^1 - Q_1^1)$$

d'où

$$\begin{aligned} X_k'(t_0) \wedge X_k''(t_0) &= \frac{k-1}{t_{k+1} - t_2} Q_2^1 \wedge Q_1^1 \\ &= \frac{k^2(k-1)}{(t_{k+1} - t_k)^2 (t_{k+2} - t_k)} (P_1 - P_0) \wedge (P_2 - P_1). \end{aligned}$$

Par définition, la courbure vaut

$$\frac{\|X' \wedge X''\|}{\|X'\|^3}$$

(pas de norme en dimension 2), donc

$$\kappa = \frac{k-1}{k} \frac{t_{k+1} - t_k}{t_{k+2} - t_k} \frac{\|(P_1 - P_0) \wedge (P_2 - P_1)\|}{\|P_1 - P_0\|^3}.$$

et on reconnaît dans $\|(P_1 - P_0) \wedge (P_2 - P_1)\| / 2$ (resp. sans norme en dimension 2) l'expression de l'aire (resp. algébrique) du triangle $P_0P_1P_2$.

Si $k \geq 3$, alors $B_{3,k-3}(t_0) = 1$ et les autres $B_{j,k-3}$ sont nulles en t_0 . Par conséquent $X_k'''(t_0) = Q_3^3$. Il vient

$$\begin{aligned}
\det(X_k'(t_0), X_k''(t_0), X_k'''(t_0)) &= \det(Q_1^1, Q_2^2, Q_3^3) \\
&= \frac{k(k-1)(k-2)}{(t_{k+1}-t_0)^3} \det(Q_1^0, Q_2^1, Q_3^2) \\
&= \frac{k(k-1)(k-2)}{(t_{k+1}-t_0)^3} \frac{k(k-1)}{(t_{k+2}-t_0)^2} \det(Q_1^0, Q_2^0, Q_3^1) \\
&= \frac{k^2(k-1)^2(k-2)}{(t_{k+1}-t_0)^3(t_{k+2}-t_0)^2} \frac{k}{t_{k+3}-t_0} \det(Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0) \\
&= \frac{k^3(k-1)^2(k-2)}{(t_{k+1}-t_0)^3(t_{k+2}-t_0)^2(t_{k+3}-t_0)} 6V.
\end{aligned}$$

On termine à l'aide de la formule 30

$$\theta = \frac{\det(X_k'(t_0), X_k''(t_0), X_k'''(t_0))}{\|X_k'(t_0) \wedge X_k''(t_0)\|^2}$$

du cours sur la courbure des courbes. ■

Attention. La formule simple ci-dessus n'est valable qu'aux noeuds de multiplicité $k+1$.

Généralisation. Rien n'empêche de calculer la dérivée de la courbure par rapport à l'abscisse curviligne. Toutefois, la formule n'est pas belle.

Exercice 14 Courbure à l'origine d'une courbe de Bézier *Calculer la courbure au point M de la courbe de Bézier construite dans l'exercice 5.*

References

- [F] G. FARIN, *Curves and surfaces for computer aided geometric design, a practical guide*. 2nd ed. Academic Press. Boston, Mass. (1990).
- [N] G. FARIN, *NURBS. From projective geometry to practical use*. 2nd ed. A. K. Peters, Wellesley, Mass. (1999).
- [HL] J. HOSCHEK, D. LASSER, *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. Teubner, Stuttgart (1989). **English translation** : *Fundamentals of computer aided geometric design*. A. K. Peters, Wellesley, Mass. (1993).
- [K] R. KRESS, *Numerical Analysis*. Graduate Texts in Math. **181**. Springer, Heidelberg (1998).
- [R] J.-J. RISLER, *Méthodes mathématiques pour la CAO*. Masson, Paris (1991).