

Aliassage

Pierre Pansu

February 16, 2004

1 Lien entre aliassage et échantillonnage

1.1 Origine de l'aliassage

L'aliassage (*aliasing*), c'est l'apparition sur une image

- de marches d'escalier ;
- de moirés ;

et la disparition de petits objets.

L'oeil est particulièrement sensible aux transitions sombre/lumineux, donc il s'attache à décortiquer les marches d'escaliers et moirés (alignements de marches d'escalier dans les régions rayées) qui n'ont pourtant aucune signification. L'oeil voit des motifs qui n'existent pas, d'où la terminologie (*alias* = autre en latin).



Figure 1 : Vue d'un cône rayé

L'aliassage a pour origine les erreurs d'*échantillonnage*, i.e. celles qui se produisent quand on transforme une image continue en une image discrète, i.e. un tableau de pixels. C'est lorsque l'image présente des transitions que l'échantillonnage pose des problèmes. On va analyser mathématiquement la perte d'information lors de l'échantillonnage d'une fonction périodique d'une variable, cela conduira à une méthodologie qu'on appliquera à l'aliassage.

1.2 Echantillonnage

Les transitions brutales, i.e. les discontinuités, sont bien détectées par la transformation de Fourier.

Exercice 1 Soit k la fonction périodique de période 2π qui vaut 1 sur $[0, \pi[$ et -1 sur $[-\pi, 0[$. Calculer ses coefficients de Fourier.

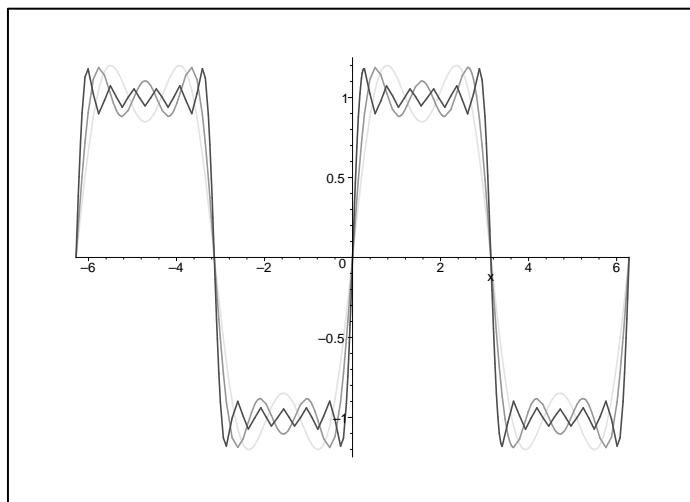


Figure 2 : Premières harmoniques d'un créneau

Sur cet exemple, on voit que la discontinuité se traduit par une décroissance lente des coefficients de Fourier, i.e. les hautes fréquences sont très présentes.

Les hautes fréquences sont difficiles à *échantillonner*, i.e. lorsqu'on transforme un signal continu en un signal discret en prenant ses valeurs à intervalles réguliers, les hautes fréquences donnent lieu à des erreurs. On va expliquer ce principe pour des fonctions d'une variable, la généralisation à deux variables est immédiate.

Exemple.

Les fonctions $x \mapsto \sin(5x)$ et $x \mapsto -\sin(2x)$ prennent les mêmes valeurs aux points $x = \frac{2k\pi}{7}$, $k \in \mathbf{Z}$.

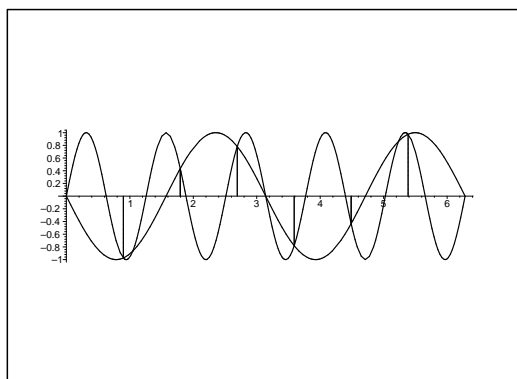


Figure 3 : Courbes représentatives de $x \mapsto \sin(5x)$ et $x \mapsto -\sin(2x)$.

Théorème 1 L'échantillonnage aux points $x = \frac{2k\pi}{N}$, $k \in \mathbf{Z}$, est injectif sur les sommes d'exponentielles de fréquences $< N/2$.

Preuve. Échantillonner f revient à remplacer f par la distribution

$$g_N = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{2k\pi}{N}\right) \delta_{\frac{2k\pi}{N}}$$

où δ_x désigne la masse de Dirac en x . Les coefficients de Fourier de g_N valent

$$(\hat{g}_N)_n = \frac{N}{2\pi} \sum_{p \in \mathbf{Z}} (\hat{f})_{n+pN}$$

(voir exercice 2). On parle de *repliement du spectre*. Si le spectre de f (i.e. l'ensemble des indices $n \in \mathbf{Z}$ tels que $(\hat{f})_n$ est non nul) est contenu dans un intervalle de longueur $< N$ (par exemple dans l'intervalle $] -N/2, N/2[$, l'application $\hat{f} \mapsto (\hat{g}_N)$ est injective, donc $f \mapsto g_N$ est injective. ■

Exercice 2 Soit f une fonction périodique de période 2π . Soit $N \in \mathbf{N}$. On note

$$g_N = \sum_{k \in \mathbf{Z}} f\left(\frac{2k\pi}{N}\right) \delta_{\frac{2k\pi}{N}},$$

où δ_x désigne la masse de Dirac en x . Calculer les coefficients de Fourier de g_N . En utilisant la décomposition de f en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}_n e^{inx},$$

montrer que

$$(\hat{g}_N)_n = \frac{N}{2\pi} \sum_{p \in \mathbf{Z}} \hat{f}_{n+pN}.$$

Conclusion : avant d'échantillonner, il faut supprimer les hautes fréquences, i.e. appliquer l'opérateur

$$P_N : f \mapsto \left(x \mapsto \sum_{|n| < N/2} \hat{f}_n e^{inx}\right).$$

P_N est le projecteur orthogonal sur le sous-espace engendré par les exponentielles de fréquences $< N/2$. On peut le voir comme un opérateur de convolution. En effet, annuler les hautes fréquences de f revient à multiplier \hat{f} terme à terme par la suite $(\hat{\chi}_N)$ telle que

$$(\hat{\chi}_N)_n = 1 \text{ si } |n| < N/2, \quad (\hat{\chi}_N)_n = 0 \text{ sinon,}$$

i.e. à convoluer f avec la fonction

$$\chi_N : x \mapsto \frac{\sin(Nx/2)}{\sin(x/2)},$$

(voir exercices 3 et 4). Autrement dit,

$$P_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) \chi_N(t) dt.$$

Exercice 3 Soient f et g deux fonctions périodiques de période 2π . On note $h = f * g$ leur produit de convolution, défini par

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t) dt.$$

Vérifier que les coefficients de Fourier de h sont donnés par

$$\hat{h}_n = \hat{f}_n \hat{g}_n.$$

Exercice 4 Soit $N \in \mathbf{N}$. Quelle est la fonction χ_N périodique de période 2π dont les coefficients de Fourier valent

$$(\hat{\chi}_N)_n = 1 \text{ si } |n| < N/2, \quad (\hat{\chi}_N)_n = 0 \text{ sinon ?}$$

Tracer sommairement sa courbe représentative (on commencera par tracer la courbe représentative de $x \mapsto \frac{1}{\sin(x/2)}$).

Voici la courbe représentative de $x \mapsto \frac{1}{\sin(x/2)}$. Pour N grand, χ_N est une sinusoïde de haute fréquence modulée par $\frac{1}{\sin(x/2)}$. Aux multiples de 2π , χ_N tend vers N (resp. $N - 1$). On en déduit la courbe représentative de χ_N (figure 4).

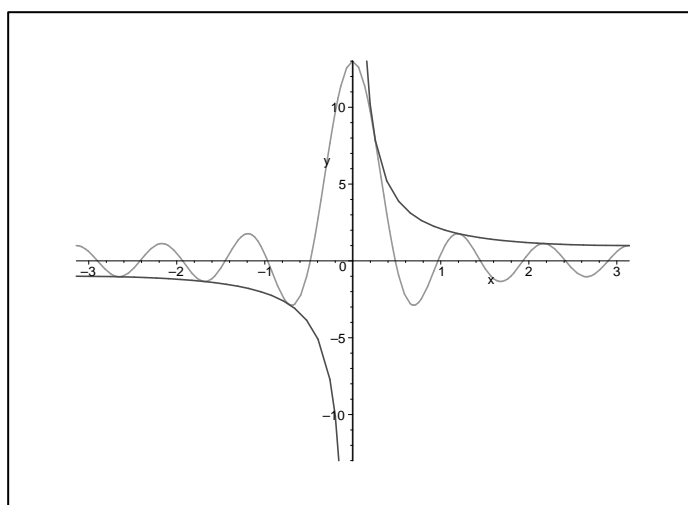


Figure 4 : Courbe représentative de χ_{13} .

2 Comment réduire l'aliassage

- En suréchantillonnant, i.e. en augmentant N . Comme cela est coûteux, on peut détecter les régions où un suréchantillonnage est nécessaire (en comparant la couleur en un point avec la couleur aux points voisins) et subdiviser les pixels correspondant. C'est le principe du *suréchantillonnage adaptatif*. On ne s'étendra pas dessus.
- En supprimant les hautes fréquences dans l'image initiale, i.e. en appliquant l'opérateur P_N ci-dessus ou une approximation de P_N dans les deux directions x et y .

2.1 Approximation de P_N

On obtient une bonne approximation de P_N en effectuant une convolution avec une approximation de χ_N , par exemple en tronquant χ_N à son premier 0, et en remplaçant l'intégrale par une somme de Riemann relative à une subdivision en $2\ell + 2$ intervalles. En termes d'échantillonnage, cela revient à choisir, pour discrétiser la fonction f , de remplacer $f(\frac{2k\pi}{N})$ par

$$\sum_{j=-\ell}^{\ell} a_j f\left(\frac{2k\pi}{N} + \frac{2j\pi}{(\ell+1)N}\right)$$

où les a_j sont des valeurs de χ_N normalisées,

$$a_j = \frac{\chi_N\left(\frac{2j\pi}{(\ell+1)N}\right)}{\sum_{i=-\ell}^{\ell} \chi_N\left(\frac{2i\pi}{(\ell+1)N}\right)}.$$

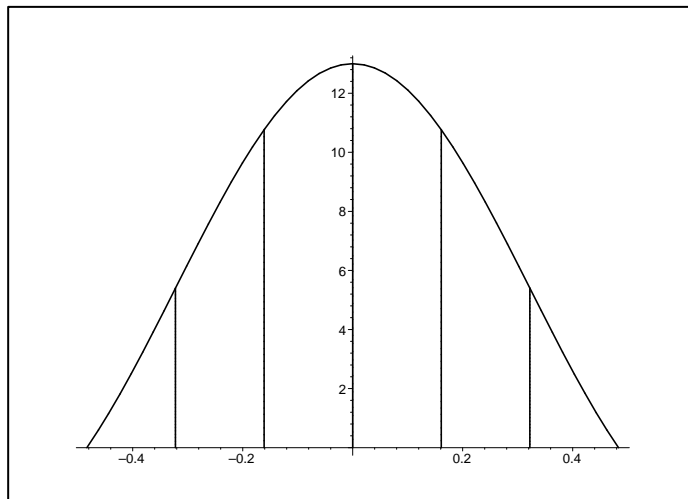


Figure 5 : Discretisation de χ_{13} ($\ell = 2$).

Autrement dit, on régularise l'échantillonnage en prenant des moyennes pondérées des valeurs aux points voisins.

2.2 Mise en oeuvre pratique

Modélisons une image noir et blanc ou un texte destinés à être affichés sur un écran d'ordinateur par une fonction $f : [0, 2\pi]^2 \rightarrow [0, 1]$. C'est réaliste si l'image est calculée (texte ou image de fabrication maison) ou donnée par un tableau de valeurs de gris de taille beaucoup plus grande que le nombre L de lignes de l'écran. On choisit un nombre $N \leq L$ du même ordre de grandeur que L , de sorte que $2\pi/N$ est de l'ordre de quelques pixels. On choisit une valeur de ℓ petite (disons $\ell = 2$). On attribue au pixel numéroté $(m, m') \in \{1, \dots, L\}^2$ l'intensité lumineuse

$$I(m, m') = \sum_{j=-\ell}^{\ell} \sum_{j'=-\ell}^{\ell} a_j a_{j'} f\left(\frac{2m\pi}{L} + \frac{2j\pi}{(\ell+1)N}, \frac{2m'\pi}{L} + \frac{2j'\pi}{(\ell+1)N}\right).$$

Ce procédé remplace les zones de transition brutale entre ombre et lumière par des dégradés dans lesquels l'oeil ne trouve pas de détail auquel s'accrocher. Modifier le rapport N/L permet d'étaler plus ou moins le dégradé.

2.3 Antialiasage et lancer de rayons

La disparition de petits objets lors du lancer de rayon peut avoir une toute autre origine : l'objet passe entre les différents rayons primaires. Pour l'éviter, on peut à nouveau suréchantillonner, ou lancer des cônes plutôt que des rayons, voir [PGMR], page 307.

2.4 Conclusion

Les programmeurs n'ont pas attendu les mathématiciens pour imaginer l'antialiasage par dégradé. L'intérêt de l'analyse mathématique est qu'elle dégage l'idée de filtrage, qui est aussi à la source des procédés actuels de compression d'images, comme les normes jpeg. L'idée d'un filtrage vu comme un projecteur sur les premiers vecteurs d'une base se généralise à d'autres bases que celle de Fourier. Les procédés les plus récents (norme jpeg2000) reposent ainsi sur les bases d'*ondelettes*.

References

- [PGMR] B. PEROCHE, D. GHAZANFARPOUR, D. MICHELUCCI, M. ROELENIS, *Informatique graphique, méthodes et modèles*. Hermès, Paris (1998).