Master MFA première année 2011-2012

Module D4MA1C20, Compléments magistère

Feuille d'auto-test, mai 2012

Cette liste de questions est destinée à vous aider dans vos révisions. Si vous hésitez, n'hésitez pas à écrire à `pierre.pansu@u-psud.fr`.

1– Soit E un ensemble fini. L'entropie est-elle une fonction concave, convexe, sur l'ensemble des distributions de probabilité sur E ?

2– Soient E_X et E_Y des ensembles finis. On peut voir l'information mutuelle $I(X;Y)$ comme une fonction sur l'ensemble des distributions de probabilité sur $E_X \times E_Y$. Est elle concave ? convexe ?

3– Soit $C : E \to \{0,1\}^*$ une application injective. On voit C comme un codage. La longueur moyenne de C lorsque la source est une variable aléatoire X est-elle toujours $\geqslant H(X)$?

4– Une marche aléatoire sur un graphe fini possède-t'elle toujours une distribution stationnaire ?

5– On fait des tirages répétés d'une variables aléatoire à valeurs dans un ensemble fini. Les suites typiques sont elles les suites dont la probabilité de sortie est la plus forte ?

6– On se donne un couple de variables aléatoires non indépendantes à valeurs dans des ensembles finis. On fait des tirages répétés et indépendants de l'une de ces variables, puis, indépendamment, de l'autre. Les suites de couples obtenues sont elles fréquemment conjointement typiques ?

7– On considère un canal sans mémoire. On consitue un nouveau canal en en utilisant n copies en parallèle (l'alphabet d'entrée devient E_X^n, celui de sortie E_Y^n). La capacité peut-elle être multipliée par plus de n ?

8– Si deux variables aléatoires X et Y prennent la même valeur avec forte probabilité, alors l'entropie conditionnelle $H(X|Y)$ est faible. Quel énoncé du cours précise cette idée ?

9– Soient α, α' et β des partitions finies d'un espace probabilisé, avec α' plus fine que α. Alors $H(\alpha|\beta) \leqslant H(\alpha'|\beta)$. Prouvez le. Quel est l'énoncé équivalent pour des variables aléatoires ?

10– Soit T la rotation d'un tiers de tour sur le cercle. T et $T \circ T$ sont elles conjuguées ?

Retour sur le siège d'Alesia

Dans le modèle étudié par Fabien (César renvoie chaque pigeon capturé porteur d'une lettre tirée au hasard parmi les 255 autres que la lettre apportée par le pigeon), la capacité est inférieure à celle du modèle de l'exercice (elle s'annule même en $\alpha = 1 - \frac{1}{2^8}$), sauf pour α très proche de 1, voir figure 1, agrandissement au voisinage de 1.

Pour le modèle étudié par Théo (César renvoie chaque pigeon capturé porteur de la lettre E), je ne sais pas faire autrement qu'en appliquant la formule obtenue dans le Devoir 2. On trouve

$$\kappa = \log_2(1 + (2^8 - 1)2^{-\frac{h(\alpha)}{1-\alpha}}).$$

La figure 2 montre les courbes obtenues en remplaçant 2^8 par 2^4 (sinon, on ne voit rien).

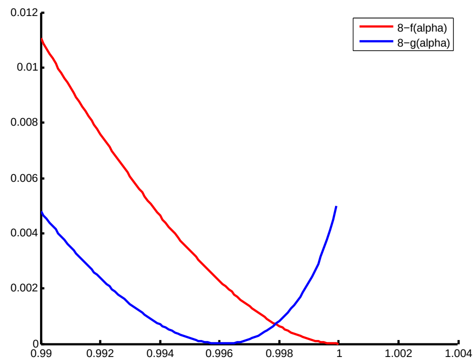

Figure 1

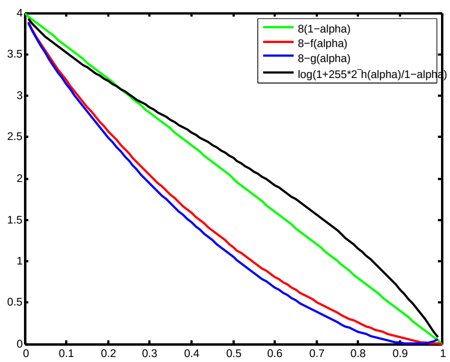

Figure 2