Master MFA première année 2011-2012

Module D4MA1C20, Compléments magistère
Feuille de TD n^{0}6

1. Propriétés élémentaires de l'entropie des partitions

Soient $\alpha = (A_x)_{x\in E_\alpha}$ et $\beta = (B_y)_{y\in E_\beta}$ deux partitions mesurables finies d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. On note $f_\alpha : \Omega \to E_\alpha$ l'application qui vaut x sur A_x. Inversement, étant donnée une application mesurable $f : \Omega \to E$ fini, on note $\alpha_f = (f^{-1}(x))_{x\in E}$ la partition induite. Soit $T : \Omega \to \Omega$ une application préservant la mesure.

1– Vérifier que $f \mapsto \alpha_f$ et $\alpha \mapsto f_\alpha$ sont deux opérations inverses l'une de l'autre. Vérifier que $\alpha\vee\beta = \alpha_g$ où $g = (f_\alpha, f_\beta) : \Omega \to E_\alpha \times E_\beta$.

2– Vérifier que $H(\alpha) = H(f_\alpha)$ est l'entropie de la variable aléatoire f_α. Vérifier que $H(\alpha|\beta) = H(f_\alpha|f_\beta)$ est l'entropie conditionnelle des variables aléatoires f_α et f_β.

3– Vérifier que $0 \leqslant H(\alpha|\beta) \leqslant H(\alpha)$. Vérifier que $H(\alpha \vee \beta) = H(\beta) + H(\alpha|\beta)$. En déduire que $H(\alpha \vee \beta) \leqslant H(\alpha) + H(\beta)$.

4– Vérifier que $\alpha \preceq \alpha'$ si et seulement si il existe une application $g : E_{\alpha'} \to E_\alpha$ telle que $f_\alpha = g \circ f_{\alpha'}$. Vérifier que dans ce cas, $H(\alpha) \leqslant H(\alpha')$ et $H(\alpha|\beta) \leqslant H(\alpha'|\beta)$.

5– Vérifier que $f_{T\alpha} = f_\alpha \circ T$. En déduire que $T(\alpha \vee \beta) = T(\alpha) \vee T(\beta)$, $H(\alpha|\beta) = H(T\alpha|T\beta)$.

2. Entropie d'un itéré

Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace probabilisé et $T : \Omega \to \Omega$ une transformation préservant la mesure. Soit α une partition mesurables finie de Ω. On note $\alpha_m^n = T^m\alpha \vee \cdots \vee T^n\alpha$.

1– Montrer que $h_\mu(T^{-1}) = h_\mu(T)$.

2– Montrer que pour tous $m \leqslant n$, $H(\Xi_{\alpha_n^m}) = H(\Xi_\alpha)$.

3– En déduire que pour tout ℓ, $h_\mu(T^\ell) = |\ell| h_\mu(T)$.

3. Distance sur l'espace des partitions

Soit $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ un espace probabilisé. Soit $T : \Omega \to \Omega$ une application qui préserve la mesure. Soit Φ l'ensemble des partitions mesurables finies de Ω modulo ensembles de mesure nulle. Autrement dit, les éléments de Φ sont les classes d'équivalence de partitions, où on identifie $\alpha = (A_x)_{x\in E_\alpha}$ et $\beta = (B_y)_{y\in E_\beta}$ si pour tout $x \in E_\alpha$, il existe $y \in E_\beta$ tel que $\mu(A_x \Delta B_y) = 0$.

1– Pour α, $\beta \in \Phi$, on pose $\rho(\alpha, \beta) = H(\alpha|\beta) + H(\beta|\alpha)$. Montrer que ρ est une distance sur Φ.

2– Montrer que pour tout α, $\beta \in \Phi$, $|H(\alpha) - H(\beta)| \leqslant \rho(\alpha, \beta)$.

3– Montrer que pour tout α, β et $\gamma \in \Phi$, $H(\beta \vee \gamma|\alpha) \leqslant H(\beta|\alpha) + H(\gamma|\alpha)$.

4– Montrer que pour tout n, $H(\beta_1^n|\alpha_1^n) \leqslant nH(\beta|\alpha)$.

5– Conclure que pour tout α, $\beta \in \Phi$, $|H(\Xi_\alpha) - H(\Xi_\beta)| \leqslant \rho(\alpha, \beta)$.

4. Entropie d'une transformation périodique

Soit T une transformation préservant la mesure d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. On suppose qu'il existe k tel que $T^\ell = id_\Omega$. Que peut on dire de l'entropie métrique de T ?