Master MFA première année 2011-2012

Module D4MA1C20, Compléments magistère
Feuille de TD n^{0}5

1. Exemple de canal

On considère le canal qui transmet un chiffre entre 0 et 9, en lui ajoutant de façon aléatoire (et équiprobable) 1,2 ou 3 modulo 10.

1– Calculer la capacité κ de ce canal.

2– Quelle est la distribution d'entrée p_X qui maximise l'information mutuelle $I(X;Y)$?

2. Transmission par pigeon voyageur

Assiégé dans Alésia par la légion romaine, Vercingétorix communique avec ses alliés Eduens au moyen de pigeons voyageurs. Il envoie un pigeon toutes les 5mn, chargé d'un message qui comporte une unique lettre (8 bits). Le pigeon met 3mn a atteindre sa destination.

1– Quelle est la capacité, en bits par heure, de ce moyen de transmission ?

2– Le centurion romain donne l'ordre d'abattre les pigeons. Une proportion α tombe donc entre les mains de la légion. Les Eduens savent quels pigeons ont été abattus. Quelle est la capacité ?

3– Plus rusé, César donne l'ordre, chaque fois qu'on abat un pigeon, d'envoyer un faux pigeon porteur d'une lettre tirée au hasard. Quelle est la capacité ?

3. Canaux faiblement symétriques

On dit qu'un canal de transmission sans mémoire est *faiblement symétrique* si

- les lignes de la matrice des probabilités de transition sont des permutations les unes des autres ;
- les sommes par colonnes sont toutes égales.

1– Montrer que pour toute variable aléatoire X en entrée, la variable de sortie Y satisfait $H(Y|X) = H(\ell)$ où ℓ est la première ligne de la matrice des probabilités de transition.

2– En déduire que $I(X;Y) \leqslant \log_2 |E_Y| - H(\ell)$. Quand l'égalité a t'elle lieu ?

3– Montrer que la capacité du canal vaut $C = \log_2 |E_Y| - H(\ell)$.

4. Annulation de l'information mutuelle conditionnelle

Soient X, Y et Z des variables aléatoires. On dit que X et Z sont indépendantes conditionnellement à Y si, pour tous x, y, z,

$$\mathbb{P}(X = x, Z = z|Y = y) = \mathbb{P}(X = x|Y = y)\mathbb{P}(Z = z|Y = y).$$

1– Montrer que X et Z sont indépendantes conditionnellement à Y si et seulement si le processus aléatoire (X, Y, Z) est une chaîne de Markov.

2– En déduire que (X, Y, Z) est une chaîne de Markov si et seulement si (Z, Y, X) est une chaîne de Markov.

3– Montrer que X et Z sont indépendantes conditionnellement à Y si et seulement si $I(X;Z|Y) = 0$.