Master MFA première année 2011-2012

Module D4MA1C20, Compléments magistère
Feuille de TD n^{0}4

1. Suites typiques

On joue à pile ou face avec une pièce truquée, qui tombe sur pile 9 fois sur 10.

1– Quelle est la suite $\in \{P, F\}^n$ qui a le plus de chances de sortir ? Est-elle typique ?

2– Quelles sont les 2^{n-1} suites $\in \{P, F\}^n$ qui ont le plus de chances de sortir ? Les suites typiques en font-elles partie ?

2. Ergodicité des rotations irrationnelles

Soit $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On appelle rotation d'angle θ (il serait plus approprié d'appeler $2\pi\theta$ l'angle) l'application $T : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ définie par $T(x) = x + \theta \mod 1$. On va montrer que T est ergodique pour la mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

1– Montrer que les nombres $x + n\theta$ sont deux à deux distincts dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

2– Montrer qu'il existe une suite m_k d'entiers telle que $m_k\theta$ tend vers 0 modulo 1.

3– Montrer que les orbites sont denses, i.e. que pour tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\{x + n\theta\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

4– Montrer que, pour tout $\delta > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on peut trouver des entiers $n_1, \ldots, n_p$ tels que les intervalles $I_j =]x + n_j\theta - \delta, x + n_j\theta + \delta[$ recouvrent $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, chaque I_j ne rencontre que I_{j-1} et I_{j+1}, et $p\delta \leqslant 1$.

5– Soit $A \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ un ensemble mesurable, invariant par T, de mesure de Lebesgue > 0. On admet que A possède un *point de densité* x_0, i.e. tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\frac{\lambda(A \cap]x_0 - \delta, x_0 + \delta[)}{\lambda(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[)} > 1 - \epsilon.$$

Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\frac{\lambda(A \cap]x_0 + n\theta - \delta, x_0 + n\theta + \delta[)}{2\delta} > 1 - \epsilon$.

6– En utilisant séparément les intervalles I_j, j pair ou impair, montrer que $\lambda(A) > 1 - 2\epsilon$. Conclure.

3. Puissances de 2

On s'intéresse au premier chiffre (en base 10) des puissances de 2. Voici les 46 premiers : 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, 1, 3. Pourtant, cette suite n'est pas périodique. D'ailleurs, voici l'histogramme obtenu sur les 1000 premiers termes de la suite.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
effectif	301	176	125	97	79	69	56	52	45

1– Relier ce problème à celui de la répartition modulo 1 des multiples de $\log_{10}(2) = 0.3010299956639811$.

2– Montrer que $\log_{10}(2)$ est irrationnel.

3– En appliquant le théorème ergodique de Birkhoff, montrer que l'histogramme des premiers chiffres des n premières puissances de 2 converge, quand n tend vers l'infini, vers une distribution de probabilité sur $\{1, \dots, 9\}$, appelée *loi de Benford*.

4– Donner une explication intuitive au fait que, au vu des 46 premiers chiffres, on a l'impression que la suite est périodique.

4. L'urne d'Ehrenfest

C'est un exemple de chaîne de Markov imaginé par le physicien austro-néerlandais Paul Ehrenfest et la mathématicienne russe Tatiana Afanasyeva-Ehrenfest, pour illustrer le second principe de la thermodynamique, et éclairer le paradoxe apparent soulevé par le Théorème de récurrence de Poincaré.

On considère une boîte fermée séparée par une cloison percée en deux compartiments. Au départ, 100 boules numérotées se trouvent dans le compartiment de gauche, aucune à droite. A chaque seconde, un chiffre entre 1 et 100 est tiré uniformément au hasard, et la boule correspondante est transférée du compartiment où elle se trouvait dans l'autre.

1– Montrer que le processus $\Upsilon = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décrit est une chaîne de Markov défini sur un ensemble E_Y à 2^{100} éléments.

2– Est-ce une marche au hasard sur un graphe pondéré ? Trouver une distribution stationnaire. Est elle unique ?

3– On s'intéresse au processus $\Xi = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où X_n est le nombre de boules situés dans le compartiment de gauche. Montrer que c'est à nouveau une chaîne de Markov. Ecrire la matrice des probabilités de transition. La chaîne est-elle une marche au hasard ?

4– Déterminer la distribution stationnaire.

5– Quelle est l'entropie par seconde du processus Ξ ?