Master MFA première année 2011-2012

Module D4MA1C20, Compléments magistère
Feuille de TD n^{0}3

1. Distribution stationnaire d'une marche au hasard

Pour la marche aléatoire sur le graphe pondéré $G = (E, w)$, vérifier que la distribution de probabilité suivante

$$\mu(x) = \frac{\sum_{z \neq x} w(x,z)}{\sum_{z \in E} \sum_{z' \neq z} w(z,z')},$$

est stationnaire.

2. Distribution stationnaire uniforme

1– Montrer qu'une chaîne de Markov possède une distribution stationnaire uniforme si et seulement si sa matrice de probabilités de transition P est *doublement stochastique*, i.e. non seulement les sommes par lignes valent 1, mais les sommes par colonnes valent aussi 1.

2– On considère la marche au hasard sur un graphe pondéré. Donner une condition suffisante pour que la distribution uniforme soit stationnaire. Est-elle nécessaire ?

3. Chaînes de Markov à entropie décroissante

Soit $X_0, X_1, \ldots$ une chaîne de Markov dont la distribution stationnaire n'est pas uniforme. Montrer que si X_0 est uniforme, alors la suite $H(X_n)$ n'est pas décroissante.

4. Convergence de l'entropie relative

Soit $X_0, X_1, \ldots$ une chaîne de Markov. Soit μ une distribution stationnaire. Montrer que $D(p_{X_n}||\mu)$ converge. La limite est-elle 0 ?

5. Croissance de l'entropie conditionnelle

Soit $X_0, X_1, \ldots$ une chaîne de Markov stationnaire.

1– Montrer que pour tout n, $H(X_{n+1}|X_1) = H(X_n|X_0)$.

2– En utilisant le fait que le conditionnement diminue l'entropie, montrer que l'entropie conditionnelle $H(X_n|X_0)$ augmente.

6. Distribution de Boltzmann-Gibbs

Un système physique isolé est décrit par une distribution de probabilité p sur un ensemble fini E. L'énergie (microscopique) $e(x)$ d'une molécule ne dépend que de l'état $x \in E$ qu'elle occupe. Elle est positive. L'énergie totale du système est $\mathcal{E}(p) = \mathbb{E}_p(e) = \sum_{x \in E} p(x)e(x)$.

1– Montrer qu'il existe une distribution q qui maximise l'entropie H à énergie totale fixée.

2– Montrer que q est unique.

3– Montrer que pour tout $x \in E$, $q(x) > 0$.

4– En appliquant le théorème des extrema liés, déterminer q. Montrer que le multiplicateur de Lagrange est uniquement déterminé par la valeur de l'énergie totale souhaitée.

5– En utilisant la positivité de l'entropie relative, redémontrer le fait que pour toute distribution de probabilité p d'énergie $\mathcal{E}$, $H(p) \leqslant H(q)$.

7. Entropie par pas pour une marche aléatoire sur un graphe fini

Soit $G = (E, w)$ un graphe pondéré fini. On pose, pour $x \in E$, $W(x) = \sum_{y \neq x} w(x, y)$ et $W = \sum_{x \in E} W(x)$. On introduit deux distributions de probabilité, $p(x, y) = \frac{w(x,y)}{W}$ sur $E \times E$ et $\mu(x) = \frac{W(x)}{W}$ sur E.

1– Soit Ξ une marche aléatoire sur G. On suppose qu'elle est irréductible et apériodique. Montrer que $H(\Xi) = H(p) - H(\mu)$.

2– Que vaut l'entropie par pas pour la marche aléatoire d'un roi (resp. d'une tour, d'un fou, d'une reine) sur un échiquier 3 ?