

Module D4MA1C20, Compléments magistère
Feuille de TD n^o1

1. Battage de cartes _____

On bat un jeu de n cartes comme suit. On tire une carte au hasard du paquet, et on la replace dans le paquet au hasard (on a le droit de la remettre en-dessous ou au-dessus du paquet). On obtient ainsi une variable aléatoire X à valeurs dans l'ensemble des permutations de n cartes.

- 1- Calculer la distribution de X .
- 2- Quelle est l'entropie de X ?

2. Loi géométrique _____

On joue à pile ou face. Soit X la variable aléatoire "premier instant où on tire face". X est à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

- 1- Calculer la loi de la variable X .
- 2- Calculer l'entropie de X .
- 3- Trouver une suite de sous-ensembles $S_i \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$ de sorte qu'en posant la suite de questions " $X \in S_i$?", on trouve le plus vite possible la valeur de X , en moyenne.

3. Permis de conduire _____

Soient X , Y et Z les variables booléennes suivantes. X indique ma réussite au permis de conduire, Y ma réussite à l'épreuve théorique (code) et Z ma réussite à l'épreuve pratique (conduite). Y et Z sont indépendantes, de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

- 1- Exprimer X en fonction de Y et Z . Calculer la loi du couple (X, Y) .
- 2- Calculer les entropies du couple (X, Y) , de X et de Y . En déduire l'entropie conditionnelle $H(X|Y)$.
- 3- Calculer la loi conditionnelle de X sachant que $Y = 1$. Vérifier que son entropie $H(X|Y = 1) > H(X)$.
- 4- Calculer la loi conditionnelle de X sachant que $Y = 0$. Vérifier en revenant à la définition que $H(X|Y) \leq H(X)$.

4. Lancer de dés _____

Soit X le résultat du lancer d'un dé non pipé, i.e. le chiffre lu sur la face supérieure. Soit Y le chiffre lu sur la face latérale tournée vers le joueur.

- 1- Calculer l'entropie conditionnelle $H(X|Y)$.
- 2- En déduire l'information mutuelle $I(X; Y)$.
- 3- Calculer directement l'information mutuelle.

5. Information contenue dans la réponse à une question _____

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble E . On pose une question au sujet de X , et on se demande de combien l'incertitude sur X a diminué. Autrement dit, on se donne un sous-ensemble $S \subset E$, on note $Y = 1_{\{X \in S\}}$ la réponse à la question "X tombe-t-elle dans S ou non ?"

- 1- Exprimer la diminution d'entropie $H(X) - H(X|Y)$ en fonction de $q = \mathbb{P}(X \in S)$.
- 2- En déduire que l'entropie diminue d'au plus 1 bit.

6. Entropie des fonctions de X _____

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans E_X , et $f : E_X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- 1- Montrer que $H(f(X)) \leq H(X)$, avec égalité si et seulement si f est injective sur le support de la loi de X .
- 2- Redémontrer l'inégalité $H(f(X)) \leq H(X)$ en calculant $H(X, f(X))$ de deux manières différentes.

7. Distance associée à l'entropie conditionnelle _____

Soient X et Y deux variables aléatoires. On pose $\rho(X, Y) = H(X|Y) + H(Y|X)$.

- 1- Vérifier que ρ est positive ou nulle. Montrer que

$$\rho(X, Y) = 2H(X, Y) - H(X) - H(Y).$$

- 2- Montrer que $\rho(X, Y) = 0$ si et seulement si il existe une bijection f du support de la loi de X sur le support de la loi de Y telle que $Y = f(X)$ presque partout.
- 3- Soient X , Y et Z trois variables aléatoires. En majorant $H(X, Z)$ par $H(X, Y, Z)$ (pourquoi peut-on le faire ?), montrer que

$$H(X|Z) \leq H(X|Y) + H(Y|Z).$$

- 4- En déduire que ρ est une distance sur l'ensemble des variables aléatoires à valeurs dans E , modulo permutation de E .

8. Concavité de l'entropie ? _____

Donner un exemple de couple de variables aléatoires (X, Y) tel que $H\left(\frac{X+Y}{2}\right) < \frac{H(X)+H(Y)}{2}$.