Université Paris-Sud 2005-2006
IFIPS S1/compléments

Test de Mathématiques
en vue du contrôle en TD, 2ème semaine d'octobre

Pour chacune des assertions 1 à 14, dire si elle est vraie ou fausse. La démontrer ou en donner un contre-exemple.

1. Pour tous réels x et y, $((x < y) \Leftrightarrow (x^2 < y^2))$.
2. Pour tous réels x et y, $(x < y < 0) \Leftrightarrow (\frac{1}{y} < \frac{1}{x})$.
3. L'assertion $\mathcal{P}$ suivante est vraie.
$$(\forall x \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{R}) \quad (((x < 1) \text{ et } (z \geq 0)) \Rightarrow (xz < z)).$$
4. L'assertion $\mathcal{Q}$ suivante est vraie.
$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad ((x \leq 1) \Rightarrow ((\exists z \in \mathbf{R})(xz < z))).$$
5. Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. Alors $C \setminus (B \setminus A) = C \setminus (A \setminus B)$.
6. Soit $f : E \to F$ une application. Si $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
7. Si $A \subset B \subset E$, alors $f(A) \subset f(B)$.
8. La réciproque de l'assertion précédente est vraie.
9. Si $A \subset B \subset E$, alors $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
10. Soit $f : E \to F$ une application. Si $G \subset H \subset F$, alors $f^{-1}(G) \subset f^{-1}(H)$.
11. La réciproque de l'assertion précédente est vraie.
12. Soit $f : E \to F$ une application. Si $G \subset F$ et $H \subset F$, $f^{-1}(G \setminus H) = f^{-1}(G) \setminus f^{-1}(H)$.
13. Soient $f : E \to F$ une application, $A \subset E$, $B \subset E$, $G \subset F$. L'ensemble des éléments de A dont l'image par f est dans G ou coïncide avec celle d'un élément de B est $A \cap f^{-1}(f(B) \cup G)$.
14. Soit E un ensemble de 32 personnes. L'application $f : E \to \{\text{janvier, ..., décembre}\}$ qui à un élément de E associe son mois de naissance est surjective.

Les questions 15 à 25 portent sur des manipulations d'assertions. Pour chacune, dire si la manipulation est correcte ou non. Si non, rétablir la conclusion exacte.

15. La négation de $((|x| > 1)$ ou $(x \in [\frac{1}{2}, 3]))$ est $(x \in [-1, \frac{1}{2}])$.
16. La négation de l'assertion $\mathcal{P}$ de la question 3 est
$$(\exists x \in \mathbf{R})(\exists z \in \mathbf{R}) \quad (((x < 1) \text{ et } (z \geq 0)) \text{ et } (xz \geq z)).$$
17. La négation de l'assertion $\mathcal{Q}$ de la question 4 est
$$(\exists x \in \mathbf{R}) \quad ((x \geq 1) \text{ ou } ((\forall z \in \mathbf{R})(xz > z))).$$
18. La réciproque de $\mathcal{P}$ est l'assertion
$$(\forall x \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{R}) \quad ((xz < z) \Rightarrow ((x < 1) \text{ ou } (z \geq 0))).$$

19. La réciproque de $\mathcal{Q}$ est l'assertion

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad (((\exists z \in \mathbf{R})(xz < z)) \Rightarrow (x > 1)).$$

20. La contraposée de $\mathcal{P}$ est l'assertion

$$(\forall x \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{R}) \quad ((xz \geq z) \Rightarrow ((x \geq 1) \text{ ou } (z \leq 0))).$$

21. La contraposée de $\mathcal{Q}$ est l'assertion

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad (((\exists z \in \mathbf{R})(xz \geq z)) \Rightarrow (x > 1)).$$

22. L'assertion *étant donnés deux entiers au moins égaux à 2, l'un se laisse toujours dépasser par une puissance de l'autre* se traduit par

$$(\forall a \in \mathbf{N})(\forall b \in \mathbf{N})(((a \geq 2) \text{ ou } (b \geq 2)) \Rightarrow ((\exists n \in \mathbf{N})(b \leq a^n))).$$

23. L'assertion *une condition suffisante pour que le jour de l'an tombe un dimanche est que le jour de Noël précédent soit un dimanche* se traduit par

$$\text{Jour de l'an un dimanche} \;\Rightarrow\; \text{Noël un dimanche.}$$

24. L'assertion *en S1 IFIPS, il y a deux étudiants du même groupe de TD qui ont leur anniversaire le même jour* se traduit par

$$(\exists i \in \{1,3,4\})(\exists x \in G_i)(\exists y \in G_i)((x \neq y) \Rightarrow (\text{anniversaire}(x) = \text{anniversaire}(y))).$$

25. L'assertion précédente signifie qu'il existe un groupe de TD tel que la restriction de l'application anniversaire à ce groupe est injective.

Corrigé du test de Mathématiques

1. Pour tous réels x et y, $((x < y) \Leftrightarrow (x^2 < y^2))$.
   C'est faux. *Prendre $x = -1$, $y = 0$.*
2. Pour tous réels x et y, $(x < y < 0) \Leftrightarrow (\frac{1}{y} < \frac{1}{x})$.
   C'est faux. *Prendre $x = 1$, $y = -1$.*
3. L'assertion $\mathcal{P}$ suivante est vraie.
   $$(\forall x \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{R}) \quad (((x < 1) \text{ et } (z \geq 0)) \Rightarrow (xz < z)).$$
   C'est faux. *Prendre $x = 0$, $z = 0$.*
4. L'assertion $\mathcal{Q}$ suivante est vraie.
   $$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad ((x \leq 1) \Rightarrow ((\exists z \in \mathbf{R})(xz < z))).$$
   C'est faux. *Prendre $x = 1$. Alors, pour tout $z \in \mathbf{R}$, $xz = z$.*
5. Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. Alors $C \setminus (B \setminus A) = C \setminus (A \setminus B)$.
   C'est faux. *Prendre $A = \emptyset$, $B = C = E \neq \emptyset$. Alors $C \setminus (B \setminus A) = \emptyset$ mais $C \setminus (A \setminus B) = E$.*
6. Soit $f : E \to F$ une application. Si $A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) \subset A$.
   C'est faux. *Prendre $E = \mathbf{R}$, $A = \mathbf{R}_+$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $f^{-1}(f(A)) = \mathbf{R}$.*
7. Si $A \subset B \subset E$, alors $f(A) \subset f(B)$.
   C'est vrai. *Si $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Comme $A \subset B$, $x \in B$, donc $y = f(x) \in f(B)$. Cela prouve que $f(A) \subset f(B)$.*
8. La réciproque de l'assertion précédente est vraie.
   C'est faux. *Prendre $E = A = \mathbf{R}$, $B = \mathbf{R}_+$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $f(A) = f(B) = \mathbf{R}_+$, mais A n'est pas contenu dans B.*
9. Si $A \subset B \subset E$, alors $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
   C'est vrai. *En fait, si $A \subset B$, $f(A) \subset f(B)$ (question 7), donc $f(A) \cap f(B) = f(A)$, $A \cap B = A$, donc $f(A \cap B) = f(A) = f(A) \cap f(B)$.*
10. Soit $f : E \to F$ une application. Si $G \subset H \subset F$, alors $f^{-1}(G) \subset f^{-1}(H)$.
    C'est vrai. *Si $x \in f^{-1}(G)$, alors $f(x) \subset G$. Comme $G \subset H$, $f(x) \in H$ donc $x \in f^{-1}(H)$. Cela prouve que $f^{-1}(G) \subset f^{-1}(H)$.*
11. La réciproque de l'assertion précédente est vraie.
    C'est faux. *Prendre $E = F = \mathbf{R}$, $G = \{-2\}$, $H = \{-1\}$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $f^{-1}(G) = f^{-1}(H) = \emptyset$ mais G n'est pas contenu dans H.*
12. Soit $f : E \to F$ une application. Si $G \subset F$ et $H \subset F$, $f^{-1}(G \setminus H) = f^{-1}(G) \setminus f^{-1}(H)$.
    C'est vrai. *$x \in f^{-1}(G \setminus H)$ si et seulement si $(f(x) \in G)$ et $(f(x) \notin H)$, i.e. si et seulement si $(x \in f^{-1}(G))$ et $(x \notin f^{-1}(H))$, i.e. si et seulement si $x \in f^{-1}(G) \setminus f^{-1}(H)$.*
13. Soient $f : E \to F$ une application, $A \subset E$, $B \subset E$, $G \subset F$. L'ensemble des éléments de A dont l'image par f est dans G ou coïncide avec celle d'un élément de B est $A \cap f^{-1}(f(B) \cup G)$.
    C'est vrai. *Soit $x \in A$ tel que $f(x) \in G$ ou il existe $x' \in B$ tel que $f(x') = f(x)$. Alors $f(x) \in f(B) \cup G$, donc $x \in f^{-1}(f(B) \cup G)$, donc $x \in A \cap f^{-1}(f(B) \cup G)$. Inversement, soit $x \in A \cap f^{-1}(f(B) \cup G)$. Alors, d'une part, $x \in A$. D'autre part, $f(x) \in f(B) \cup G$, donc $f(x) \in G$ ou il existe $x' \in B$ tel que $f(x') = f(x)$. Autrement dit, x est un élément de A dont l'image par f est dans G ou coïncide avec celle d'un élément de B.*

14. Soit E un ensemble de 32 personnes. L'application $f : E \to \{\text{janvier, ..., décembre}\}$ qui à un élément de E associe son mois de naissance est surjective.

    C'est faux. *Prendre 32 personnes parmi les français qui sont nés en janiver (il doit y en avoir des millions).*

15. La négation de $((|x| > 1)$ ou $(x \in [\frac{1}{2}, 3]))$ est $(x \in [-1, \frac{1}{2}])$.

    Manipulation incorrecte. *Le réel* $x = \frac{1}{2}$ *satisfait les deux assertions. La négation de* $((|x| > 1)$ *ou* $(x \in [\frac{1}{2}, 3]))$ *est* $((|x| \leq 1)$ *et* $(x \notin [\frac{1}{2}, 3]))$, *soit* $(x \in [-1, \frac{1}{2}[)$.

16. La négation de l'assertion $\mathcal{P}$ de la question 3 est

$$(\exists x \in \mathbf{R})(\exists z \in \mathbf{R}) \quad (((x < 1) \text{ et } (z \geq 0)) \text{ et } (xz \geq z)).$$

    Manipulation correcte. *On utilise la règle suivante : la négation de* $A \Rightarrow B$ *est* A *et* $\mathit{non}B$.

17. La négation de l'assertion $\mathcal{Q}$ de la question 4 est

$$(\exists x \in \mathbf{R}) \quad ((x \geq 1) \text{ ou } ((\forall z \in \mathbf{R})(xz > z))).$$

    Manipulation incorrecte. *La négation de l'assertion*

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad ((x \leq 1) \Rightarrow ((\exists z \in \mathbf{R})(xz < z))).$$

    est

$$(\exists x \in \mathbf{R}) \quad ((x \leq 1) \ \textit{et} \ ((\forall z \in \mathbf{R})(xz \geq z))).$$

18. La réciproque de $\mathcal{P}$ est l'assertion

$$(\forall x \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{R}) \quad ((xz < z) \Rightarrow ((x < 1) \text{ ou } (z \geq 0))).$$

    Manipulation correcte. *On utilise la régle suivante : la réciproque de* $A \Rightarrow B$ *est* $B \Rightarrow A$.

19. La réciproque de $\mathcal{Q}$ est l'assertion

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad (((\exists z \in \mathbf{R})(xz < z)) \Rightarrow (x > 1)).$$

    Manipulation incorrecte. *La réciproque de*

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad ((x \leq 1) \Rightarrow ((\exists z \in \mathbf{R})(xz < z))).$$

    est

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad (((\exists z \in \mathbf{R})(xz < z)) \Rightarrow (x \leq 1)).$$

20. La contraposée de $\mathcal{P}$ est l'assertion

$$(\forall x \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{R}) \quad ((xz \geq z) \Rightarrow ((x \geq 1) \text{ ou } (z \leq 0))).$$

    Manipulation incorrecte. *La contraposée de*

$$(\forall x \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{R}) \quad (((x < 1) \ \textit{et} \ (z \geq 0)) \Rightarrow (xz < z)).$$

    est

$$(\forall x \in \mathbf{R})(\forall z \in \mathbf{R}) \quad ((xz \geq z) \Rightarrow ((x \geq 1) \ \textit{ou} \ (z < 0))).$$

21. La contraposée de $\mathcal{Q}$ est l'assertion

$$(\forall x \in \mathbf{R}) \quad (((\exists z \in \mathbf{R})(xz \geq z)) \Rightarrow (x > 1)).$$

Manipulation correcte. *On utilise la régle suivante : la contraposée de $A \Rightarrow B$ est $nonB \Rightarrow nonA$.*

22. L'assertion *étant donnés deux entiers au moins égaux à 2, l'un se laisse toujours dépasser par une puissance de l'autre* se traduit par

$$(\forall a \in \mathbf{N})(\forall b \in \mathbf{N})(((a \geq 2) \text{ ou } (b \geq 2)) \Rightarrow ((\exists n \in \mathbf{N})(b \leq a^n))).$$

Traduction incorrecte. *La traduction correcte est*

$$(\forall a \in \mathbf{N})(\forall b \in \mathbf{N})(((a \geq 2) \text{ et } (b \geq 2)) \Rightarrow ((\exists n \in \mathbf{N})(b \leq a^n))).$$

23. L'assertion *une condition suffisante pour que le jour de l'an tombe un dimanche est que le jour de Noël précédent soit un dimanche* se traduit par

$$\text{Jour de l'an un dimanche} \Rightarrow \text{Noël un dimanche.}$$

Traduction incorrecte. *La traduction correcte est*

$$\textit{Noël un dimanche} \Rightarrow \textit{Jour de l'an un dimanche.}$$

24. L'assertion *en S1 IFIPS, il y a deux étudiants du même groupe de TD qui ont leur anniversaire le même jour* se traduit par

$$(\exists i \in \{1,3,4\})(\exists x \in G_i)(\exists y \in G_i)((x \neq y) \Rightarrow (\text{anniversaire}(x) = \text{anniversaire}(y))).$$

Traduction incorrecte. *La formule proposée est toujours vraie (prendre $x = y$). La traduction correcte est*

$$(\exists i \in \{1,3,4\})(\exists x \in G_i)(\exists y \in G_i)((x \neq y) \text{ et } (\textit{anniversaire}(x) = \textit{anniversaire}(y))).$$

25. L'assertion précédente signifie qu'il existe un groupe de TD tel que la restriction de l'application anniversaire à ce groupe est injective.
Traduction incorrecte. *L'assertion 24 signifie précisément qu'il existe un groupe de TD tel que la restriction de l'application anniversaire à ce groupe n'est pas injective.*