Université de Paris XI **L1 – Calculus Math101**
Mathématiques **1er semestre 05/06**

Questions pour le test 1

Limites, continuité, dérivabilité

A rendre la semaine du 10 Octobre

Pour chaque affirmation suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

Indication: il y a 11 affirmations vraies et 9 affirmations fausses

1.— La limite de $\frac{1}{x}e^{\sqrt{\ln x}}$ lorsque $x \to \infty$ est $+\infty$.

2.— Si f est définie au voisinage de 0, $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$ et si (u_n) est une suite convergente vers 0 alors $f(u_n)$ converge vers 2.

3.— Soit H la fonction définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos^2 x$ alors $H \circ f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

4.— On peut trouver une fonction f continue sur l'intervalle $I = [2, 3]$ qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $\frac{5}{2}$

5.— La formule $f(x) = \frac{\ln(x^2-16x-17)}{x^2-30x+200}$ définit une fonction continue sur l'intervalle $]20, 100[$.

6.— La fonction $f : x \in [0, 1] \mapsto x^2 - x + \frac{1}{8}$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[0, 1]$ car $f(0).f(1) > 0$.

7.— La limite de $x \mapsto |x-1|^{\frac{1}{2}} \ln(|\sin \frac{1}{2(x-1)}| + 17\ln(x) + 2)$ lorsque x tend vers 1 est 0.

8.— On peut trouver une fonction f continue sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$ telle que $f(I) = \mathbb{R}$.

9.— On peut trouver une fonction f continue sur l'intervalle $[0, 1]$ qui s'annule une infinité de fois mais qui ne soit pas identiquement nulle sur aucun sous-intervalle de $[0, 1]$.

10.— Soit f la fonction définie pour $x \in [1, 2]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq \sqrt{2} \\ -1 & \text{si} \quad x < \sqrt{2} \end{cases}$$

La méthode de recherche de solutions de l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie appliquée à f sur l'intervalle I produit deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) dont la limite commune est $\sqrt{2}$.

11.— Soit f une fonction dérivable à droite et à gauche en $x = 3$ alors f est dérivable en 3.

12.— La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = x^2 \sin(1/x)$ se prolonge par continuité en 0 et ce prolongement est dérivable sur $\mathbb{R}$.

13.— La fonction qui à x associe $f(x) = |x - \pi| \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

14.— Si f est dérivable en x_0, alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + 3h) - f(x_0 + h)}{h} = 2f'(x_0)$$

15.— Soit f la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} |x + \pi| & \text{si} \quad x \geq 0 \\ |x - \pi| & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sin(f(x))$ est continue dérivable en 0.

16.— On a, pour x voisin de 0 :

$$e^{\sin(2x)} = 1 + 3x + x\epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0.$$

17.— Soit f la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = |x| - 1$. Comme $f(1) = f(-1) = 0$, il existe un réel c dans $]-1, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

18.— Pour tous réels x et y compris entre -1 et 1, on a

$$|x^{2005} - y^{2005}| \leq 2005|x - y|$$

19.— Soit f une fonction dérivable sur $[-2, 3]$ tel que $f'(1) = 0$, alors f admet un extremum local en 1.

20.— La courbe représentative de la fonction qui à x associe $(\ln(1+|x|))^2$ admet une tangente horizontale en $x = 0$.