Questions pour le test 2

Développements Limités, Fonctions réciproques
A effectuer la semaine du 24 Octobre

Pour chaque affirmation suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

Indication: il y a affirmations vraies et affirmations fausses

1.— Le DL d'ordre 4 de $\sin x$ en $\frac{\pi}{4}$ est

$$\sin(\frac{\pi}{4}+h)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}h-\frac{\sqrt{2}}{4}h^2-\frac{\sqrt{2}}{12}h^3+\frac{\sqrt{2}}{48}h^4+h^4\epsilon(h)$$

2.— La fonction f définie par $f(x)=x^3\sin\frac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$ admet comme DL d'ordre 2 en 0, $f(x)=x^2\epsilon(x)$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage de 0 et sa dérivée seconde en 0 vaut 0.

3.— Une valeur approchée de $\sqrt{257}$ à 2^{-12} près est $16+\frac{1}{32}$.

4.— D'une manière générale, pour calculer le DL d'ordre 3 en 0 d'une fonction du type $f(x).g(x)$, il suffit de connaitre les DLs d'ordre 3 en 0 de f et g.

5.— Pour calculer le DL d'ordre 17 en 0 de $(\sin x)^2.(\cos x-1)$, il suffit d'utiliser le DL d'ordre 13 du sinus en 0 et le DL d'ordre 15 du cosinus.

6.— D'une manière générale, pour calculer le DL d'ordre 3 en 0 d'une fonction du type $f(g(x))$, il suffit de connaitre les DLs d'ordre 3 en 0 de f et g.

7.— Si f est une fonction définie au voisinage de 0 telle que f vérifie que pour tout x voisin de 0, $f(x)^3+f(x)=2+4x$ alors, s'il existe, son DL d'ordre 2 en 0 vaut

$$f(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+x^2\epsilon(x)$$

8.— Si le DL d'ordre 4 de f au voisinage de 3 est

$$f(3+h)=1+2h-\frac{1}{2}h^4+h^4\epsilon(h)$$

alors la tangente à f en 3 a pour équation $y=1+2(x-3)$ et, au voisinage de 3 le graphe de f est au-dessous de sa tangente.

9.— Si le DL d'ordre 4 de f au voisinage de 3 est

$$f(3+h) = 1 + 2h + h^4\epsilon(h)$$

alors la tangente à f en 3 a pour équation $y = 1 + 2(x-3)$ et, au voisinage de 3 le graphe de f traverse sa tangente.

10.— La fonction qui à tout réel x associe $(x-1)^2 + 3$ réalise une bijection de $[0,2]$ dans $[3,4]$.

11.— La fonction qui à x associe $-x^2$ établit une bijection de $\mathbb{R}^-$ dans $\mathbb{R}^-$ dont la fonction réciproque est donnée par la formule $f^{-1}(y) = -\sqrt{-y}$.

12.— Si f est continue sur $[a,b]$, elle est à valeurs dans le segment dont les bornes sont $f(a)$ et $f(b)$.

13.— La fonction qui à tout réel x associe $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et sa fonction réciproque est dérivable sur $\mathbb{R}$.

14.— Pour tout nombre a, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \exp(a)$$

15.— Pour tout réel x : $\tan(\arctan x) = x$.

16.— Pour tout réel x : $\arccos(\cos x) = x$.

17.— Le graphe de la figure 1 est schématiquement le graphe de la fonction qui à x dans $[-\pi,\pi]$ associe $\arcsin(\sin x)$.

18.— Le DL à l'ordre 5 en 0 de arctan est

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + x^5\epsilon(x)$$

19.— Pour tout réel x non nul on a :

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

20.— Pour tout réel x on a :

$$2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x) + \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

21.— Soit $z = x + iy$ un nombre complexe de module 1, différent de $-i$ et i, alors il s'écrit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

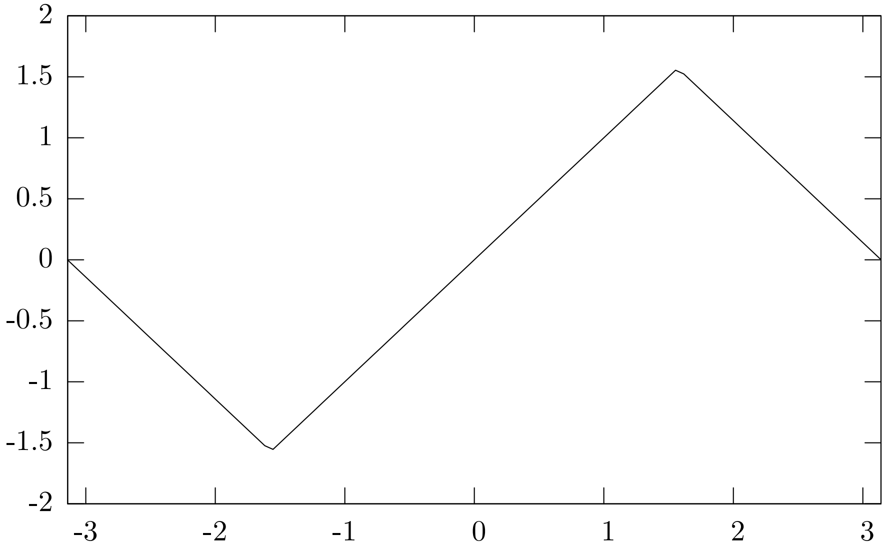

FIG. 1 – Le graphe de $\arcsin(\sin(x))$?