Université de Paris XI — **L2 S3**
Mathématiques — **1er semestre 2006/2007**

Contrôle Continu Numéro 3. Durée 2 h. Sans document ni calculatrice.

L'épreuve comprend deux questions de cours et huit exercices indépendants. Un barème indicatif est donné.

Question de cours 1 (2 pts)
Donner la définition de la trace d'une matrice, puis celle de la trace d'un endomorphisme (en justifiant que cette dernière a bien un sens).

Question de cours 2 (2 pts)
Donner la définition explicite du déterminant d'une matrice $n \times n$ $A = (a_{ij})$, puis calculer celui de la matrice 3×3 suivante :

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} .$$

Préambule
On rappelle (très succinctement) que, pour une matrice carrée A, le polynôme caractéristique de A est le polynôme

$$X \mapsto P_A(X) = \text{Dét}\,(XI_d - A) \ ,$$

où I_d est la matrice de l'identité. On rappelle que les zéros de P_A sont les valeurs propres de A et que, pour une valeur propre λ de A, un vecteur propre associé de A est un élément non nul dans le noyau de $(\lambda I_d - A)$. On rappelle qu'une matrice est diagonalisable si on peut trouver une base de vecteurs propres. Diagonaliser la matrice A, c'est trouver une matrice P inversible (appelée matrice de passage) telle que $P^{-1}AP$ est diagonale. Enfin on rappelle qu'il y a deux théories selon que l'on travaille dans le cas réel ou le cas complexe.

Exercice 1.— (2 pts)
Soit $\mathcal{P}$ un parallélogramme d'aire $\mathcal{A}$. Soit $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice réelle telle que $ad - bc = 1$. Donner l'aire de l'image de $\mathcal{P}$ par l'application linéaire associée à C.

Exercice 2.— (3 pts)
Soient dans $\mathbb{R}^3$ u et v les vecteurs définis par :

$$u = (1, 3, 4) \ , \ v = (1, 2, 3) \ .$$

Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}$ engendré par u et v est de dimension 2 dans $\mathbb{R}^3$, et donner une équation de $\mathcal{H}$.

Tourner la page SVP

Exercice 3.— (2 pts)
Soit A une matrice 2×2 définie par

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ,$$

où a, b, c, d sont des nombres complexes tels que

$$a, d \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad b = \bar{c}.$$

Montrer que bc est un réel positif, en déduire que les valeurs propres de A sont réelles et montrer que A est toujours diagonalisable. *On ne demande pas de calculer la matrice de passage.*

Exercice 4.— (3 pts)
Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

On donnera successivement le polynôme caractéristique de A, ses valeurs propres et la matrice de passage P permettant de la diagonaliser.

Exercice 5.— (3 pts)
Calculer (et factoriser) le polynôme caractéristique associé à la matrice 4×4 :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

En déduire les valeurs propres et leur multiplicité. *On ne demande pas de calculer la matrice de passage.*

Exercice 6.— (4 pts)

Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

On donnera successivement le polynôme caractéristique, les valeurs propres et la matrice de passage P.

Exercice 7.— (2 pts)
Déterminer la solution $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'équation

$$2u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ ; \ u_0 = 0 \ , \ u_1 = 1 \ .$$

Exercice 8.— (4 pts)

Déterminer toutes les solutions complexes $\mathbb{R} \ni t \mapsto X(t) \in \mathbb{C}^2$ de classe C^1 du système différentiel

$$X'(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} X(t) \ ,$$

où θ est un paramètre réel fixé.
En déduire une base de l'espace des solutions réelles de ce système.