**Université de Paris XI** — **L2 S3**
**Mathématiques** — **1er semestre 2006/2007**

**Contrôle Continu Numéro 2. Durée 2 h. Sans document ni calculatrice.**

**Question de cours**
Donner la définition de la normale unitaire à une surface paramétrée et préciser comment on la calcule.

**Exercice 1.—**
On considère la courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$x(t) = \frac{t-1}{t^2-4}\ , \qquad y(t) = \frac{t+1}{(t-2)(t+4)}\ .$$

1) Donner le domaine de définition maximal $\mathcal{D}_f$ dans $\mathbb{R}$ sur lequel on peut définir la courbe.
2) Montrer que $x'$ et $y'$ ont un signe constant.
3) Quelle est la tangente à la courbe au point $(x, y) = (0, 0)$ ?
4) Montrer que la courbe possède trois asymptotes dont on donnera les équations.
5) Faire le tableau des variations de la courbe et en déduire le graphe de la courbe (la détermination du point double n'est pas demandée).

**Exercice 2.—**
On considère la courbe paramétrée définie sur $[0, 2\pi]$ par

$$t \mapsto (x(t), y(t)) = (4\sqrt{2}\sin t\ ,\ \sin(2t))\ .$$

1) Montrer que cette courbe paramétrée présente une symétrie par rapport à l'origine, puis une symétrie par rapport à l'axe $\vec{Ox}$.
2) Donner l'allure de cette courbe paramétrée quand $t$ parcourt l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.
3) Calculer la longueur de la courbe, quand $t$ varie de 0 à $2\pi$.

**Exercice 3.—**
On se donne dans $\mathbb{R}^3$ la courbe paramétrée définie, pour $t \in \mathbb{R}$, par

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) = (6t + 6t^2 + 2t^3\ ,\ 2t^3\ ,\ 6t)\ .$$

Calculer l'abscisse curviligne $t \mapsto s(t)$ sur la courbe, où pour normaliser on supposera que $s(0) = 0$ et que $s' \geq 0$.

**Tournez la page S.V.P.**

**Exercice 4.—**
On considère le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\vec{V}(x,y) = (xy^3 + 3y + \exp x\ ,\ 3xy^4 + 4\cos y)\ .$$

Calculer la circulation de $\vec{V}$ le long du bord du rectangle $[1,4] \times [1,2]$ parcouru dans le sens trigonométrique.

**Exercice 5.—**
Soit $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$. On considère la 1-forme $\omega$ définie sur $\Omega$ par

$$\omega = \frac{x+2y}{(x+y)^2}\, dx \ + \ \frac{y}{(x+y)^2}\, dy\ .$$

1) Montrer que $\omega$ est fermée.
2) Montrer que $\Omega$ est convexe.
3) En déduire sans calcul que $\omega$ est exacte.
4) Déterminer une fonction $u$ de classe $C^1$ sur $\Omega$ telle que $du = \omega$ et $u(1,0) = 0$.

**Exercice 6.—**
On se propose de calculer l'intégrale curviligne de la 1-forme

$$\omega = -yx^2\, dx + xy^2\, dy\ ,$$

le long du cercle de centre $(0,1)$ et de rayon 1 parcouru dans le sens trigonométrique.
(a) Appliquer la formule de Green-Riemann pour ramener le calcul de cette intégrale curviligne à une intégrale double.
(b) Après un premier changement de variables simple, suggéré par la géométrie, calculer cette intégrale.

**Exercice 7.—**
Discuter en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'existence et l'unicité des solutions du système :

$$(S)\ \left\{ \begin{array}{ll} 2x + y + 3z & = 1 \\ \alpha x + 2y + 6z & = 3 \end{array} \right. ,$$

et les trouver explicitement.