Université Paris-Sud 11 **S3-Ifips**
Mathématiques **2006–2007**

Contrôle 1

Date: mardi 3 octobre 2006.
Documents interdits, calculatrices interdites.
Les téléphones mobiles doivent être éteints.
Durée: 2h.

Question de cours.

Enoncer avec précision le théorème de Cauchy–Lipschitz.

Exercice 1.
Soit u la fonction définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$u(x, y) = \cos(x^2 y)\, e^y \ + \ (x + 2y)^3 \ .$$

Calculer $\partial_x u$, $\partial_y u$, $\partial_x^2 u$, $\partial_y^2 u$, $\partial_{xy}^2 u$.

Exercice 2.
2.1. Trouver toutes les solutions maximales de l'équation différentielle

$$y'(x) = 2x(y(x) + 1) \ .$$

2.2. Trouver la solution maximale qui vérifie $y(0) = 1$ et tracer sommairement son graphe.
2.3. Trouver la solution maximale qui vérifie $y(0) = -1$ et tracer sommairement son graphe.

Exercice 3.
On se propose de trouver les solutions maximales (dans des intervalles de $]0,+\infty[$) de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2 \ .$$

3.1. Déterminer $a \in]0,+\infty[$ tel que $y_0(x) = ax$ soit une solution particulière de (E).

3.2. Montrer que le changement de fonction inconnue $y(x) = y_0(x) - \dfrac{1}{z(x)}$ transforme (E) en l'équation différentielle

$$(E1) \qquad z'(x) + (6x + \frac{1}{x})z(x) = 1.$$

3.3. Résoudre $(E1)$ sur $]0,+\infty[$.
3.4. Donner toutes les solutions maximales de (E) (en précisant l'intervalle de définition dans $]0,+\infty[$) et déterminer parmi celles-ci celles qui sont définies dans l'intervalle $]0,+\infty[$ tout entier.

Exercice 4.
4.1. Trouver toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$.
4.2. Trouver une solution de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = x^2e^x$ sous la forme $P(x)e^x$ où P est un polynôme.
4.3. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = x^2e^x$.

Exercice 5.
On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 4y = x \sin x$.
5.1. Une fonction impaire peut-elle en être solution ?
5.2. Donner une solution de la forme $P(x)\sin x + Q(x)\cos x$, avec P et Q des polynômes.
5.3. Trouver toutes les solutions maximales de cette équation différentielle.