Expériences numériques sur les oscillateurs non linéaires

Contact : raimbault@lptp.polytechnique.fr

Les questions numérotées dans le corps du texte sont à traiter en priorité.
Une indication placée à la fin de la question vous indique la nature du travail à effectuer : [CA] : calcul analytique, [CN] : calcul numérique, [RB] : recherche bibliographique.
Les figures reportées dans le texte vous indiquent, à titre d'illustration, quelques-uns des résultats que vous devrez obtenir.
Des indications bibliographiques non exhaustives vous sont proposées à la fin du texte.
Selon votre rapidité et le soin que vous apporterez aux réponses, les points intitulés "Prolongements" pourront être abordés dans un deuxième temps.

1 Introduction

Dans ce projet, on vous propose de réaliser des *expériences numériques* dans le but d'étudier une classe particulière d'*oscillateurs non linéaires forcés*. Une expérience numérique est une simulation réalisée sur ordinateur, qui apporte sur le système étudié, un ensemble d'informations complémentaires aux démarches plus traditionnelles que constituent l'analyse théorique et l'expérience réalisée dans des conditions réelles.

Une fois mis en équation, le problème que nous étudierons se ramène à l'étude de l'équation différentielle

$$\ddot{\phi} = -\sin\phi - \frac{1}{Q}\,\dot{\phi} + A\,\sin\omega t, \tag{1}$$

en fonction des valeurs prises par les paramètres Q, A et ω, et des conditions initiales $\phi(0)$ et $\dot{\phi}(0)$ (dans cette expression le point désigne une dérivée par rapport à la variable t).

Cette équation, assez simple, se rencontre en physique dans des contextes très variés et joue un rôle de paradigme pour l'étude des systèmes non linéaires déterministes. L'objectif principal de votre projet est de montrer, au moyen d'outils adaptés que nous introduirons progressivement, que la non linéarité associée au forçage conduit à une grande richesse de comportements allant des mouvements périodiques jusqu'aux évolutions chaotiques.

Question 1.
Caractériser succintement les oscillateurs linéaires, non linéaires, forcés, libres, dissipatifs, conservatifs, paramétriques. [RB]

Question 2.
A quelle catégorie appartiennent les oscillateurs de Duffing, de van der Pol, de Rayleigh ? [RB]

1.1 Exemples et Adimensionnement

L'exemple le plus évident correspondant à l'équation (1) est celui du pendule pesant simple forcé. Ce système est constitué d'une masse ponctuelle m, suspendue à une tige rigide de longueur L et de masse négligeable, placée dans le champ de gravitation terrestre d'accélération g, et soumise à une force extérieure périodique. L'équation régissant l'évolution de l'angle $\phi(\tau)$ mesuré à partir de la verticale, au cours du temps τ, est donnée par

$$mL\,\frac{d^2\phi}{d\tau^2} = -mg\,\sin\phi - kL\,\frac{d\phi}{d\tau} + C\,\sin\omega_e\tau,$$

où k est un coefficient de frottement et C est l'amplitude de la force extérieure de pulsation ω_e.

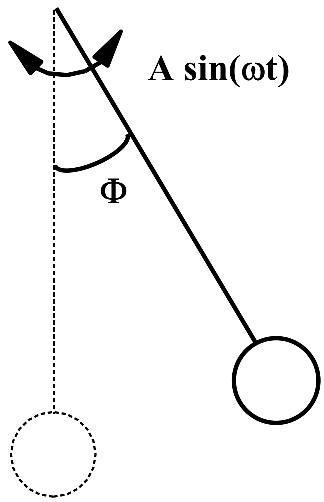

Fig. 1 – Pendule forcé.

Question 3.
Montrer que l'on peut choisir un système d'unités tel que cette équation puisse s'écrire sous la forme adimensionnée (1).
On précisera les relations entre Q, A, ω, t et m, L, τ, ω_e. [CA]

Question 4.
Trouver au moins un autre exemple de système physique qui se ramène, après une normalisation convenable, à une équation du type (1). [RB]

1.2 Plan de phase et Méthode d'Euler

Il est souvent utile (et toujours possible) de réexprimer une équation différentielle d'ordre n comme un système différentiel de n équations différentielles du premier ordre.

La vitesse angulaire $\dot{\phi}$ est une des variables naturelles du problème. Posons $v(t) = \dot{\phi}(t)$. Il est évident que l'équation différentielle (1) peut s'écrire comme un système différentiel de 2 équations du 1er ordre dans les variables v et ϕ :

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= v \\ \dot{v} &= -\sin\phi - \frac{1}{Q}\,v + A\,\sin\omega t \end{aligned}$$

Le plan (ϕ, v) est appelé *plan de phase*. Nous verrons dans la suite qu'une représentation (paramétrique) des solutions dans ce plan de phase fournit une information complémentaire sur la nature des solutions par rapport à la solution explicite $\phi(t)$.

Pour résoudre numériquement le système différentiel précédent, le plus élémentaire est d'utiliser *la méthode d'Euler*. Cette méthode consiste à remplacer les dérivées par une approximation de différences finies. En d'autres termes, les fonctions ne sont évaluées sur l'intervalle $[0, T]$ qu'en des points équidistants $0, t_1, \cdots, t_N = T$, tels que $t_{i+1} - t_i \equiv \Delta t = T/N$. Les solutions sont ensuite obtenues de proche en proche à partir des conditions initiales.

Question 5.
En utilisant un développement de Taylor, montrer que le système différentiel précédent peut être résolu, $\forall n = 0, N-1$, par le schéma d'Euler explicite suivant :

$$\begin{aligned} \phi(t_{n+1}) &= \phi(t_n) + \Delta t\, v(t_n) \\ v(t_{n+1}) &= v(t_n) + \Delta t\, \left(-\sin\phi(t_n) - \frac{1}{Q}\,v(t_n) + A\,\sin\omega t_n\right) \end{aligned}$$

Donner une interprétation géométrique de cet algorithme.
Quelle condition l'incrément Δt doit-il vérifier ? [CA]

Question 6.
Ecrire un programme MatLab réalisant le schéma d'Euler précédent pour $A = 0$ et $Q = 10$.
Représenter les fonctions $t \mapsto \phi(t)$ et $t \mapsto v(t)$ lorsque $\phi(0) = 1$ et $v(0) = 0$, puis lorsque $\phi(0) = 1$ et $v(0) = 4$.
Interpréter les trajectoires observées.
Tester le rôle de la valeur de Δt.
Comparer la solution obtenue avec celle calculée par un programme de résolution des équations différentielles proposé par Matlab (tels ode45 ou ode23, par exemple).
[CN]

1.3 Prolongements

1. *Jonctions Josephson* [RB]
   Effectuer une recherche bibliographique succinte sur les jonctions Josephson.
   Expliquer pour quelles raisons physiques elles peuvent être modélisées par un oscillateur non linéaire.
2. *Algorithmes numériques* [RB]
   Expliquer simplement ce qu'est un schéma d'intégration explicite, implicite, du 1er ordre, à un point ou plusieurs points.
   Donner quelques exemples.

2 Oscillateur linéaire

L'équation différentielle régissant le mouvement d'un pendule linéaire s'écrit :

$$\ddot{\phi} = -\phi - \frac{1}{Q}\,\dot{\phi} + A\,\sin\omega t \tag{2}$$

Comme on le voit, cette équation peut être obtenue à partir de (1) en remplaçant $\sin\phi$ par ϕ. Lorsque les valeurs prises par ϕ restent faibles, une telle *linéarisation* est une bonne approximation du problème initial non linéaire.

Les mathématiques offrent des méthodes extrêmement puissantes pour l'étude des systèmes linéaires. Dans ce qui suit vous aller comparer les résultats de votre expérience numérique avec les solutions explicites obtenues par un calcul assez facile (de l'algèbre linéaire élémentaire).

Les systèmes dissipatifs, comme celui que nous étudions, sont caractérisés par l'existence d'un ensemble de points, que l'on appelle *attracteurs*, vers lequel tendent toutes les trajectoires appartenant à un certain domaine du plan de phase lorsque $t \to +\infty$. Pour les oscillateurs linéaires de cette section, nous mettrons en évidence 2 attracteurs : les attracteurs ponctuels et les attracteurs périodiques.

Question 7.
Montrer que l'équation différentielle (2) est équivalente au système différentiel $\dot{\vec{u}} = C\vec{u} + \vec{b}$, où $\vec{u}$ est le vecteur $\vec{u} = (\phi, v)$, et où C et $\vec{b}$ sont respectivement une matrice 2×2 et un vecteur que l'on précisera.
Déterminer les valeurs propres $\lambda_{1,2}$ de la matrice C. [CA]

Question 8.
Vérifier le résultat précédent par un calcul numérique pour $Q = 5$. [CN]

2.1 Oscillateur linéaire libre ($A = 0$)

On considère d'abord le cas sans force extérieure appliquée. On a donc $A = 0$ et Q quelconque positif.

Question 9.
Déterminer les solutions analytiquement en fonction de $\lambda_{1,2}$.
Combien y-a-t'il de cas qualitativement différents ?
Quelles sont les solutions asymptotiques (i.e. celles obtenues lorsque $t \to +\infty$) ? [CA]

Question 10.
Représenter les solutions analytiques et les solutions numériques $t \mapsto \phi(t)$ sur un même schéma.
Tester le rôle des conditions initiales et du paramètre Q.
Les solutions asymptotiques dépendent-elles des conditions initiales ? [CN]

Question 11.
Effectuer la même étude numérique que précédemment dans le plan de phase (i.e. construire la représentation paramétrique $\phi \mapsto v$).
Expliquer physiquement la forme de la trajectoire obtenue.
En déduire l'attracteur associé au pendule linéaire libre. [CN]

On considère ensuite la limite $Q \to \infty$, toujours avec $A = 0$.

Question 12.
A quelle situation physique ce cas correspond-il ?
Déterminer l'équation du mouvement et sa solution.
Quelle est la fréquence propre de ce pendule ? [CA]

Question 13.
Déterminer les trajectoires dans le plan de phase.
Quelle courbe plane obtient-t-on ?
Quel est l'invariant associé à ces trajectoires ?
Comparer avec les résultats numériques. [CA+CN]

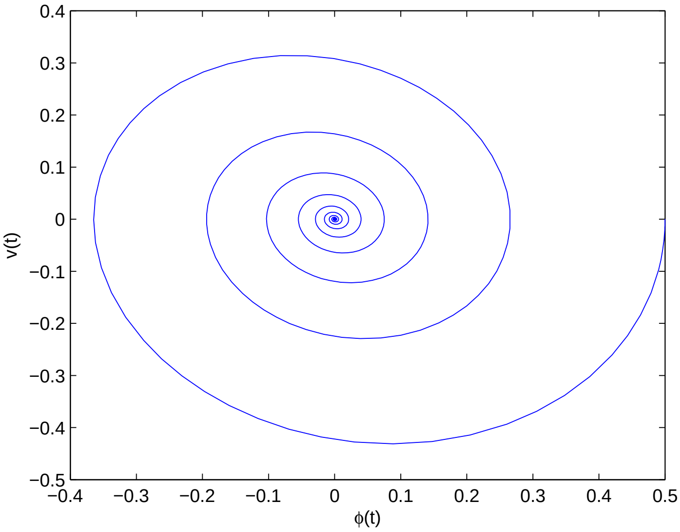

FIG. 2 – Plan de phase du pendule linéaire libre et amorti.

2.2 Oscillateur linéaire forcé ($A \neq 0$)

On considère maintenant le pendule linéaire forcé : $A \neq 0$.
On étudiera par exemple le cas où $Q = 10, A = 5.4, \omega = 3$ avec les conditions initiales $\phi(0) = 0$ et $v(0) = 0$.

Question 14.
Représenter la solution numérique $t \mapsto \phi(t)$.
Mettre en évidence les régimes transitoires et forcés.
Comparer les période et phase de la solution obtenue en régime forcé avec celles de la force extérieure. [CN]

Question 15.
Représenter la solution numérique dans le plan de phase (ϕ, v).
Comment se manifestent les régimes transitoires et forcés ?
Le régime forcé dépend-il des conditions initiales ?
La solution asymptotique est qualifiée "d'attracteur périodique". Justifiez cette terminologie. [CN]

Question 16.
Montrer pour cet oscillateur linéaire, que l'attracteur périodique est l'ellipse d'équation :

$$\phi^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = \frac{A^2}{(\omega^2 - 1)^2 + \omega^2/Q^2} \tag{3}$$

Comparer avec le résultat numérique. [CA+CN]

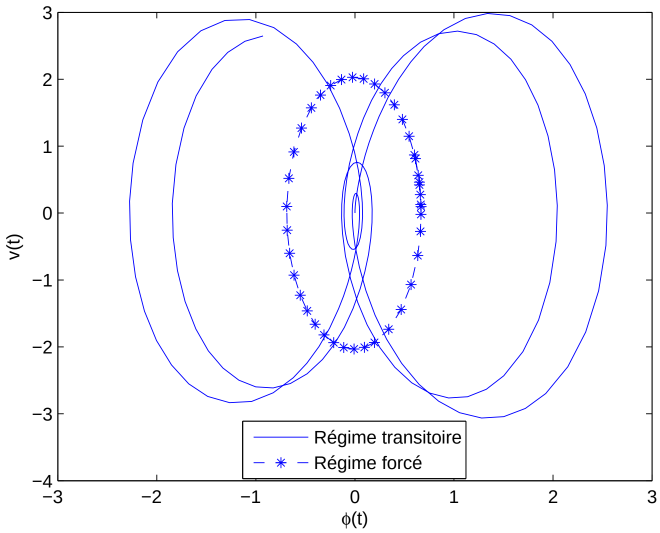

FIG. 3 – Plan de phase du pendule linéaire forcé et amorti.

2.3 Prolongements

1. *Résonance*

   Définir le phénomène de résonance pour un oscillateur linéaire.
   Calculer et représenter l'amplitude de la solution en régime forcé en fonction de la fréquence excitatrice.

2. *Systèmes raides*

   Si le temps est normalisé au temps caractéristique kL/mg (au lieu de $(L/g)^{1/2}$), montrer que l'équation du pendule non forcé prend la forme $Q^2\,\ddot{\phi} = -\sin\phi - \dot{\phi}$.
   Dans ce cas, lorsque $Q \to 0$, l'équation différentielle se dégénère en une équation algébrique. Le cas $Q \ll 1$ doit donc être traité numériquement par des méthodes spécifiques.
   Discuter cette situation à l'aide des différentes routines disponibles sous MatLab.

3 Oscillateur non linéaire

Pour les pendules linéaires forcés, le seul attracteur périodique possible est celui donné par l'équation (3). Nous allons voir que la situation asymptotique devient beaucoup plus riche lorsque la non linéarité se couple au forçage.

Cette complexité a un prix. Il n'existe pas de méthodes analytiques quantitatives universelles pour traiter les systèmes non linéaires. Une analyse numérique pertinente devient alors particulièrement précieuse. Nous verrons que la représentation stroboscopique du plan de phase, introduite par Poincaré au début du siècle, est une méthode très efficace pour caractériser les attracteurs associés aux comportements des oscillateurs non linéaires.

3.1 Attracteurs périodiques et Sections de Poincaré

Dans cette partie nous mettons en évidence le fait que le nombre d'attracteurs périodiques des pendules non linéaires forcés dépend de l'amplitude de la force extérieure.

Pour simplifier l'analyse, nous proposons dans ce qui suit des conditions initiales qui nous placent aussitôt au voisinage immédiat des attracteurs périodiques, ce qui permet d'identifier plus clairement les comportements asymptotiques, sans avoir à "se débarasser" du régime transitoire.

Question 17.
Etudier et interpréter successivement les cas :
- $Q = 10, A = 5.4, \omega = 3$ *pour* $\phi(0) = -0.03, v(0) = -2.01$,
- $Q = 10, A = 9.0, \omega = 3$ *pour* $\phi(0) = -2.55, v(0) = -5.72$,
- $Q = 10, A = 9.0, \omega = 3$ *pour* $\phi(0) = -0.04, v(0) = -3.31$,
- $Q = 10, A = 9.0, \omega = 3$ *pour* $\phi(0) = -0.78, v(0) = +0.15$.

Que se passe-t-il si l'on modifie légèrement les conditions initiales ? [CN]

Les solutions périodiques précédentes obéissent à l'équation :

$$\phi(t + mT) = \phi(t) + 2\pi\ell, \tag{4}$$

où ℓ et m sont des entiers et où $T = 2\pi/\omega$ est la période de la force extérieure.

Question 18.
Montrer que les 4 cas étudiés à la question précédente peuvent être identifiés par des couples de valeurs (ℓ, m) *que l'on précisera dans chacun des cas.* [CN]

Pour l'instant, nous n'avons mis en évidence que des solutions qui présentent la même période en régime forcé que la force extérieure ($m = 1$). En rapprochant la fréquence excitatrice de la fréquence naturelle ($\omega = 1$) du pendule, il est possible de faire apparaître des solutions périodiques stables dont la période est le double de la fréquence excitatrice ($m = 2$). On parle de *doublement de période*.

Question 19.
Etudier et interpréter successivement les cas :
- $Q = 10, A = 4.9, \omega = 1.4$ *pour* $\phi(0) = -1.27, v(0) = -2.03$,
- $Q = 10, A = 4.9, \omega = 1.4$ *pour* $\phi(0) = +0.42, v(0) = -3.01$. [CN]

Une information complémentaire, surtout utile pour la mise en évidence des attracteurs chaotiques, est fournie par une la *méthode des sections de Poincaré.* L'idée est de procéder à une analyse stroboscopique à la période T, qui conduit à ne retenir dans le plan de phase $(\phi(t), v(t))$ que les points à intervalles de temps régulier nT. Ainsi, après avoir laissé s'éteindre le régime transitoire, on pourra par exemple retenir les points $(\phi(nT), v(nT))$ au début de chacune des périodes d'application de la force extérieure. Une solution à m cycles comprendra donc exactement m points atteints à tour de rôle dans la section de Poincaré.

Question 20.
Ecrire un programme MatLab qui permette de représenter la section de Poincaré du pendule non-linéaire.
Tester votre programme en utilisant les paramètres et conditions initiales utilisés précédemment pour les cas $m = 1$ *et* $m = 2$. [CN]

3.2 Attracteur chaotique

Le doublement de période observé dans la section précédente est le premier d'une cascade de doublement de période $1, 2, 4, 8, \cdots$ qui surviennent lorsqu'on diminue la fréquence de forçage du pendule vers sa fréquence naturelle. Pour le pendule, la période de l'attracteur tend vers l'infini lorsque $\omega \to \omega_c \approx 1.3$. En dessous de cette fréquence, l'évolution est dite chaotique. Les solutions asymptotiques tendent néanmoins vers un attracteur bien défini, qualifié *d'étrange*, en raison de sa dimension fractale.

L'existence d'un attracteur en régime chaotique traduit une certaine forme de stabilité globale. L'état chaotique est cependant localement instable, dans le sens où une très légère différence de conditions initiales conduit plus ou moins rapidement à des trajectoires complètement distinctes, mais qui se retrouvent toutes asymptotiquement sur l'attracteur. Un tel comportement, charactéristique du régime chaotique, est connu sous le nom de *sensibilité aux conditions initiales.*

Question 21.
Calculer la section de Poincaré pour $\omega = 0.8, Q = 10, A = 1.6$ *et pour les conditions initiales* $\phi(0) = v(0) = 0$.
Quelles observations peut-on faire sur la nature de l'attracteur obtenu ? [CN]

Question 22.
Tester la sensibilité aux conditions initiales en comparant les solutions obtenues en régime chaotique pour $v(0) = 0$ *et pour* $\phi(0) = 0$ *ou* $\phi(0) = 0.001$ *ou* $\phi(0) = 10^{-6}$. [CN]

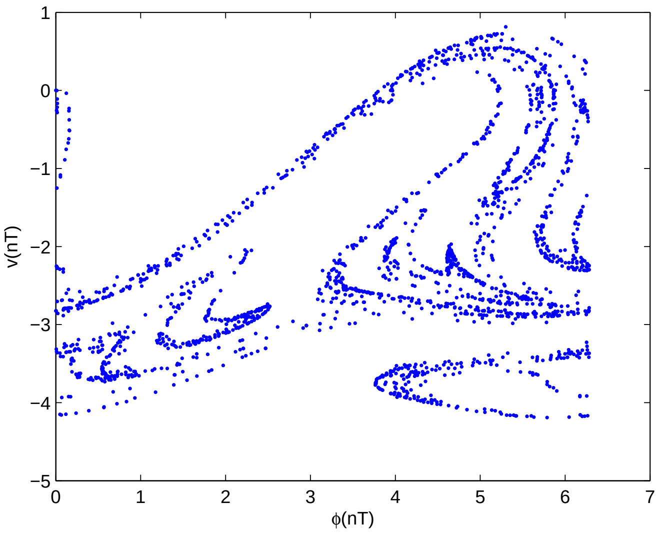

FIG. 4 – Section de Poincaré du pendule forcé en régime chaotique.

3.3 Prolongements

1. *Pendule inversé*
   Le pendule inversé ($\phi = \pi$) est une position notoirement instable en l'absence de forces extérieures. Il est pourtant possible de stabiliser cette position par une force extérieure.
   Analyser le cas où $Q = 10, A = 22.5, \omega = 3$ avec $\phi(0) = +3.1, v(0) = -7.1$. Quel est le lien avec le "piège de Paul" ? [CN+RB]
2. *Terminologie*
   Donner les définitions et quelques exemples simples se rapportant aux termes suivants : systèmes hamiltoniens et systèmes dissipatifs, attracteurs et bassin d'attraction, dimension fractale. [RB]

4 Bibliographie indicative

Les 3 premiers ouvrages de cette liste donnent des informations comparables sur les oscillateurs, tandis que le dernier vous apprendra davantage sur les systèmes non linéaires :

1. *Cours de Physique : de Newton à Mandelbrot*,
   D. Stauffer, H. E. Stanley et A. Lesné,
   Springer, 1999. (Chapitres 2 et 6).
2. *Cours de Physique de Berkeley, Tome 1 : Mécanique*,
   Dunod, 1972. (Chapitre 7).

3. *Mécanique générale*,
C. Gruber,
Presse Universitaire Romande, 1998. (Chapitres 7 et 17).
4. *L'ordre dans le chaos*,
P. Bergé, Y. Pomeau, C. Vidal,
Hermann, 1984, (Introduction, chapitres 1 et 2).