Si X est une variable d'espérance nulle et de variance 1, sa fonction caractéristique a un développement limité qui commence par

$$\xi_X(u) = 1 - 2\pi^2 u^2 + \cdots$$

Soit Y la somme de n variables independantes de même loi que X, divisée par la racine carrée de n, $Y = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + \cdots + X_n)$. Alors

$$\begin{aligned} \xi_Y(u) &= \xi_X(\frac{u}{\sqrt{n}})^n \\ &= (1 - \frac{2\pi^2 u^2}{n} + \cdots)^n \\ &\sim e^{-2\pi^2 u^2}, \end{aligned}$$

qui est la fonction caractéristique d'une variable normale standard.

Je trouve ce calcul instructif. On voit comment la loi normale surgit du néant. Pour compléter la preuve du théorème central limite, il faut définir précisément la convergence en loi et prouver que la convergence ponctuelle des fonctions caractéristiques entraîne la convergence en loi. Mais c'est de la technique.