Université de Paris XI | **L1 – Calculus Math101**
Mathématiques | **1er semestre 05/06**

Premier Partiel de Mathématiques

IFIPS–Le 26 Octobre 2005–9h00-11h00

– Barème indicatif–

Documents écrits, électroniques, calculatrices et téléphones portables interdits

Question de Cours (4 pts)

1. Montrer la proposition suivante Si f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et si f admet un maximum local en un point $x_0 \in I$ alors $f'(x_0) = 0$.
2. Déterminer le maximum et le minimum de la fonction

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$$

sur l'intervalle $[0, 3]$.

Exercice 1 (8 pts)

1. **a.** Effectuer un DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction $g(x) = \frac{1}{2}(2x + \sin^2 x)$
b. Effectuer un DL à l'ordre 4 en 0 de la fonction g.
2. **a.** Effectuer un DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction $h(x) = \ln(\cos x + \sin x)$
b. Effectuer un DL à l'ordre 4 en 0 de la fonction h.
3. Soit f la fonction réelle de variable réelle définie par la formule

$$f(x) = \frac{2}{\sin^2 x + 2x} - \frac{1}{\ln(\cos x + \sin x)} = \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{h(x)}$$

Montrer que cette fonction est bien définie sur un voisinage pointé de 0.
4. En utilisant les DL à l'ordre 2 des dénominateurs, montrer que cette fonction se prolonge par continuité en 0. En notant encore f la fonction ainsi prolongée, que vaut $f(0)$?.
5. En supposant montré que, sur un voisinage de 0, on a

$$f(x) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{12}x - \frac{7}{24}x^2 + x^2\epsilon(x)$$

avec $\epsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$, donner l'équation de la tangente au graphe de f en 0 et préciser les positions relatives du graphe de f et de cette tangente au voisinage de 0.
6. (HORS BAREME) En utilisant les DL à l'ordre 4 des dénominateurs, démontrer la formule indiquée dans la question précédente.

Exercice 2 (8 pts)

1. On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par la formule $g(x) = e^x - x$. En étudiant le sens de variation de g, montrer que g est strictement positive sur $[0, +\infty[$.
2. Soit $y > 2$ un nombre réel et la fonction $f_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par la formule $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - y$. Etudier les variations de f_y et en déduire qu'il existe un unique réel $\alpha_y \in [0, +\infty[$ tel que

$$f_y(\alpha_y) = 0.$$

3. On se propose d'obtenir des informations sur α_y lorsque $y \to +\infty$.
a. Evaluer $f_y(\ln y)$ et en déduire que $\alpha_y > \ln y$.
b. En appliquant le théorème des accroissements finis à f_y sur l'intervalle $[\ln y, \alpha_y]$, montrer que

$$(\alpha_y - \ln y)(y - \ln y) \leq \frac{1}{2}(\ln y)^2$$

N.B. On vérifiera soigneusement les hypothèses dudit théorème.
c. Déterminer la limite de $\alpha_y - \ln y$ lorsque $y \to \infty$.