Distributions : complément

29 janvier 2007

1 Série de Fourier d'une distribution périodique

Définition. On dit qu'une distribution $U \in \mathcal{D}'(R)$ est T**-périodique** si on a pour une translation positive τ_T

$$\tau_T(U) = U.$$

Le nombre T est une **période** de la distribution U et le plus petit de ces nombres est appelé **période fondamentale**.

Définition 1 *Soit U une distribution, I un intervalle de $\mathbf{R}$. On dit que le support de U est contenu dans I si, pour toute fonction d'essai ϕ nulle sur I, $\langle U, \phi \rangle$.*

Théorème. La condition nécessaire et suffisante pour que U soit une distribution périodique de période T est que l'on puisse trouver une distribution V à *support borné* V telle que

$$U = \sum_{k \in Z} \tau_{kT}(V)$$

Ex.157 Soit f une fonction T-périodique dans $L^1(T)$, elle définit une distribution T-périodique U_f et on peut prendre pour V la distribution régulière définie par la fonction v

$$v(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [a, a+T[\text{ où } a \in R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ex.158 Prenons pour V la distribution de Dirac à l'origine. Donner l'expression de la distribution T-périodique III_T ainsi obtenue.

Définition. Soit U une distribution T-périodique telle que $U = \sum_{k \in Z} \tau_{kT}(V)$. On appelle **coefficients de Fourier** de U les nombres complexes

$$c_k(U) = \frac{1}{T} < V, e^{-ik\omega t} >$$

Où $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $k \in Z$.

Remarque. Le nombre $< V, e^{-ik\omega t} >$ est parfaitement défini puisque la fonction $t \to e^{-ik\omega t}$ est une fonction C^∞ et que le support de V est borné.

Théorème. Soit U une distribution T-périodique, alors

$$U = \lim_{N \to \infty} (\mathcal{D}') \sum_{k=-N}^{k=+N} c_k(U) e^{ik\omega t}$$

et pour $k \neq 0$ on a $|c_k(U)| \leq Cons.|k|^r$, où r est un entier positif.

Inversement. Une suite de nombres $\{c_k\}_{-\infty}^{\infty}$ satisfaisant à l'inégalité précédente est la suite des coefficients de Fourier d'une distribution T-périodique.

Proposition 2 *Soit U' la dérivée de la distribution T-périodique U, on a alors*

$$c_k(U') = ik\omega c_k(U).$$

Ex.160 Calculer les coefficients de Fourier $c_k(III_T)$ et $c_k III_T$.

2 Méthode de la variation de la constante

Motivation. Considérons un système physique, par exemple, un oscillateur harmonique gouverné par une équation différentielle de la forme $ay'' + by' + cy = F(t)$, où $F(t)$ est un terme de forçage. On donne au sysème une impulsion brutale au temps $t = 0$. Cela signifie que $F(t)$ est proportionnel à la distribution de Dirac à l'origine. Quelle est la réponse du système ? On est amené à résoudre des équations différentielles dont le second membre est une distribution, avec inconnue distribution.

2.1 Cas des équations différentielles du premier ordre

On commence par résoudre les équations différentielles de la forme

$$(\mathcal{E}) \quad a(x)y' + b(x)y = U,$$

où a et b sont des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbf{R}$, a ne s'annule pas et U est une distribution.

Proposition 3 *La méthode classique de résolution s'étend au cas où le second membre est une distribution.*

1. On résoud l'équation homogène. On trouve des solutions proportionnelles, $f(x) = C\,e^{c(x)}$ où c est une primitive de $-b/a$.
2. On cherche une solution particulière de l'équation $(\mathcal{E})$ sous la forme $T = e^{c(x)}U$, où U est une distribution inconnue. Cela conduit à $T' = e^{-c}U$, qui possède une solution T_0.
3. Toutes les solutions sont de la forme $T = T_0 + C\,e^{c(x)}$.

Exemple 4 *Résoudre l'équation différentielle $y' + 2xy = \delta_0$.*

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $f(x) = C\,e^{x^2}$. Il reste à résoudre $T' = e^{-x^2}\delta_0 = \delta_0$, soit $T_0 = H$, fonction d'Heaviside. Toutes les solutions sont de la forme $T = (H + C)e^{x^2}$.

2.2 Cas des équations différentielles à coefficients constants

Revenons au problème initial, un oscillateur qu'on brutalise. Tant que $t < 0$, il ne se passe rien, donc la solution est nulle. Lorsque $t > 0$, le système oscille librement, son mouvement est solution de l'équation *homogène* $ay'' + by' + cy = 0$. Donc on peut penser que la solution est de la forme $f(t)H$ où f est solution de l'équation homogène.

Proposition 5 *L'équation différentielle $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = \delta_0$ possède une solution de la forme $f(t)H$ où f est solution de l'équation homogène $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$.*