ANALYSE EN S5 IFIPS

16 juillet 2007

Chapitre 1

Compléments d'intégration

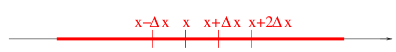
1.1 Motivation

1.1.1 Diffusion de la chaleur

On s'intéresse à la diffusion de la chaleur dans un solide homogène et isotrope. Pour simplifier, on suppose le solide unidimensionnel (fil infiniment fin), représenté par l'intervalle $[0, L]$ de l'axe réel. La température f est une fonction de la position $x \in [0, L]$ et du temps $t \in [0, T]$. A chaque instant t, pendant un temps Δt, un volume infinitésimal entre x et $x + \Delta x$ reçoit de la chaleur de ses voisins $[x - \Delta x, x]$ et $[x + \Delta x, x + 2\Delta x]$, proportionnellement à la différence de leurs températures. Par conséquent

$$f(x, t + \Delta t) = f(x, t) + \alpha(f(x - \Delta x, t) - f(x, t)) + \alpha(f(x + \Delta x, t) - f(x, t)),$$

où α est une quantité sans dimension, supposée indépendante de x et de t, car le solide est homogène.



On utilise les développements limités (de Taylor-Young)

$$f(x, t + \Delta t) = f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial t}\,\Delta t + \cdots, \quad f(x + \Delta x, t) = f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\Delta x^2 + \cdots,$$

il vient, aux restes près,

$$\frac{\partial f}{\partial t}\,\Delta t = \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\Delta x^2.$$

Cela conduit à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial t} = c \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \tag{1.1}$$

où c est homogène à un temps divisé par le carré d'une longueur. Depuis D. Poisson, cette équation est connue sous le nom d'*équation de la chaleur.*

1.1.2 Condition aux limites

On suppose le solide conducteur de la chaleur, mais entouré d'un isolant parfait. L'absence d'échanges de chaleur au voisinage immédiat de l'isolant entraîne que la température y est infinitésimalement constante, i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(L, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

1.1.3 Résolution

Pour des données particulières, l'équation 1.1 peut être résolue explicitement. Considérons l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des polynômes trigonométriques pairs de degré $\leq n$, i.e. des fonctions sur $[0, L]$ de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos(\frac{\pi x}{L}) + a_2 \cos(2\frac{\pi x}{L}) + \cdots + a_n \cos(n\frac{\pi x}{L}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\frac{\pi x}{L}).$$

Remarquer que toutes ces fonctions satisfont à la condition aux limites $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(L) = 0$. La dérivée seconde d'une fonction de $\mathcal{P}_n$ est à nouveau une fonction de $\mathcal{P}_n$. On peut donc considérer l'application A qui à un élément f de $\mathcal{P}_n$ associe $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ comme une application linéaire de $\mathcal{P}_n$ dans $\mathcal{P}_n$. Notons e_k la fonction $x \mapsto \cos(k\frac{\pi x}{L})$. Alors $e_0, \cdots, e_n$ forment une base de $\mathcal{P}_n$. Dans cette base, la matrice de A est diagonale,

$$A = \frac{\pi^2}{L^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -n^2 \end{pmatrix}.$$

Pour une fonction $f \in \mathcal{P}_n$, l'équation de la chaleur se traduit par $\frac{\partial f}{\partial t} = cAf$, c'est un système différentiel linéaire à coefficients constants, qui se résoud immédiatement, puisque A est diagonale. Si $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\frac{\pi x}{L})$, alors

$$f(x,t) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{-c\frac{\pi^2}{L^2}k^2 t} \cos(k\frac{\pi x}{L}). \tag{1.2}$$

On remarque que, lorsque t tend vers $+\infty$, $f(x,t)$ tend vers la constante a_0 : la chaleur se répartit uniformément.

1.1.4 Passage à la limite

Un polynôme trigonométrique, c'est un cas particulier de série de Fourier. En fait, une série de Fourier, c'est une limite de polynômes trigonométriques. Si

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(k\frac{\pi x}{L}),$$

alors f est la limite quand n tend vers l'infini des polynômes trigonométriques

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\frac{\pi x}{L}).$$

On sait résoudre l'équation de la chaleur avec f_n comme condition initiale, la solution est

$$f_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{-k^2\frac{\pi^2}{L^2}t} \cos(k\frac{\pi x}{L}).$$

Il faut maintenant montrer que la suite de fonctions $f_n(x,t)$ converge, quand n tend vers l'infini.

1.1.5 Conservation de la quantité de chaleur

Si f est une fonction positive sur $[0,\pi]$, qui modélise la température le long d'un fil de longueur finie, appelons *quantité de chaleur* emmagasinée dans le fil l'intégrale $\int_0^L f(x)\,dx$.

Proposition 1 *Soient $f(x,t)$ et $g(x,t)$ des fonctions continues, solutions de l'équation de la chaleur. Alors*

1. *Si $f(x,0)\geq 0$ pour tout x, alors $f(x,t)\geq 0$ pour tout x et tout $t\geq 0$.*
2. *Si $f(x,0)\geq g(x,0)$ pour tout x, alors $f(x,t)\geq g(x,t)$ pour tout x et tout $t\geq 0$.*
3. *La quantité de chaleur $\int_0^\pi f(x,t)\,dx$ est indépendante de t.*

Preuve. 1. Comme $f(x,t+dt)$ est la moyenne de $f(x-dx,t)$ et de $f(x+dx,t)$, si les deux sont positifs, $f(x,t+dt)$ l'est aussi.

2. Par linéarité de l'équation, $f(x,t)-g(x,t)$ est la solution de l'équation de la chaleur de condition initiale $f(x,0)-g(x,0)$. D'après 1, si $f(x,0)-g(x,0)\geq 0$, $f(x,t)-g(x,t)\geq 0$ pour tout $t\geq 0$.

3. On dérive sous le signe somme et on intègre par parties.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^L f(x,t)\,dx &= \int_0^L \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx\\ &= \int_0^L c\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\,dx\\ &= c\frac{\partial f}{\partial x}(L,t)-c\frac{\partial f}{\partial x}(0,t)=0\end{aligned}$$

en vertu de la condition aux limites choisie.■

Corollaire 2 *Soit $f(x,t)$ une solution à valeurs complexes de l'équation de la chaleur. Alors $\int_0^L |f(x,t)|\,dx \leq \int_0^L |f(x,0)|\,dx$.*

Preuve. Soit $g(x,t)$ la solution de l'équation de la chaleur de donnée initiale $g(x,0)=|f(x,0)|$. Comme $-g(x,0)\leq f(x,0)\leq g(x,0)$ pour tout x, $-g(x,t)\leq f(x,t)\leq g(x,t)$ pour tout $t\geq 0$, soit $|f(x,t)|\leq g(x,t)$. En intégrant,

$$\int_0^L |f(x,t)|\,dx \leq \int_0^L g(x,t)\,dx = \int_0^L g(x,0)\,dx = \int_0^L |f(x,0)|\,dx.■$$

1.1.6 Distance L^1

Définition 3 *Soient f et g des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs complexes. On appelle* distance L^1 *de f à g, et on note*

$$D(f,g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx.$$

On dit qu'une suite f_n de fonctions converge en distance L^1 *vers f si $D(f_n,f)$ tend vers 0.*

Exemple 4 *Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_n(x)=x^n$. Alors la suite de fonctions f_n converge en distance L^1 vers la fonction nulle.*

En effet, $D(f_n,0)=\frac{1}{n+1}$ tend vers 0. On voit qu'une suite peut converger en distance L^1 sans converger en chaque point. En fait, ce qui se passe en un nombre fini de points n'a aucune influence sur la convergence L^1.

Exemple 5 Fonction discontinue qui est limite en distance L^1 de fonctions continues. *Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = |x|^{-1/2}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Alors f est la limite en distance L^1 d'une suite de fonctions continues.*

En effet, posons $f_n(x) = n^{1/2}$ si $x \in [-1/n, 1/n]$, $f_n(x) = f(x)$ ailleurs. Alors f_n est continue, et

$$\begin{aligned} D(f_n, f) &= \int_{-1/n}^{1/n} ||x|^{-1/2} - n^{1/2}|\,dx \\ &\leq 2\int_0^{1/n} x^{-1/2}\,dx \\ &= 4n^{-1/2}, \end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Proposition 6 *Soit f une fonction deux fois continûment dérivable sur $[0, L]$ qui satisfait aux conditions aux limites $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(L) = 0$. Soient a_k les coefficients de Fourier trigonométriques de f. Alors les sommes partielles de la série de Fourier $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(k\frac{\pi x}{L})$ convergent en distance L^1 vers f.*

Preuve. On prolonge f en une fonction paire et périodique de période $2L$. Montrons que la série $\sum a_k$ est absolument convergente. Comme $f(-L) = f(L)$ et $f'(-L) = f'(L) = 0$, en intégrant deux fois par parties, il vient, pour $k > 0$,

$$2La_k = \int_{-L}^{L} f(x)\cos(k\frac{\pi x}{L})\,dx = -\frac{L}{k\pi}\int_{-L}^{L} f'(x)\sin(k\frac{\pi x}{L})\,dx = -\frac{L^2}{k^2\pi^2}\int_{-L}^{L} f''(x)\cos(k\frac{\pi x}{L})\,dx.$$

Il existe M tel que, pour tout $x \in [0, L]$, $|f(x)| \leq M$. Alors $2L|a_k| \leq ML^2\pi^{-2}k^{-2}$, terme général d'une série convergente, donc la série $\sum a_k$ est absolument convergente.

Posons $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\frac{\pi x}{L})$. Alors

$$\begin{aligned} D(f_n, f) &= \int_0^L |\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos(k\frac{\pi x}{L})|\,dx \\ &\leq L\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|, \end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.■

1.1.7 Passage à la limite (bis)

Proposition 7 *Soit f_n une suite de fonctions qui converge en distance L^1 vers une fonction f. Soit $f_n(x,t)$ la solution de l'équation de la chaleur de condition initiale f_n. Alors pour tout t, $f_n(x,t)$ converge en distance L^1 vers une solution de l'équation de la chaleur de condition initiale f.*

Preuve. On note $f_{n,t}$ la fonction définie par $x \mapsto f_n(x,t)$. Si n et m sont grands,

$$D(f_{n,t} - f_{m,t}) \leq D(f_{n,0}, f_{m,0})$$

est petit, donc la suite de fonctions $f_{n,t}$ converge en distance L^1.

Pour conclure, il faudrait montrer que la limite $f(x,t)$ est dérivable en x et t et satisfait l'équation de la chaleur. On l'admet.■

Exemple 8 *Si f est deux fois dérivable sur $[0, L]$ et satisfait aux conditions aux limites $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(L) = 0$, on obtient une bonne approximation de $f(x,t)$ au moyen des sommes partielles de sa série de Fourier et de la formule (1.2).*

On a donc obtenu un procédé de résolution de l'équation de la chaleur, pour des données initiales deux fois dérivables.

Généralisation. On peut montrer que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est limite en distance L^1 de polynômes trigonométriques (qui ne proviennent pas nécessairement de sa série de Fourier). On peut donc théoriquement résoudre l'équation de la chaleur pour toute fonction continue sur un intervalle borné. On peut aussi le faire pour les limites en distance L^1 de telles fonctions, comme, par exemple, la fonction $|x|^{-1/2}$ sur $[-1, 1]$. Et enfin, pour des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, pourvu qu'elles soient limites en distance L^1 de fonctions nulles en dehors d'un intervalle fermé borné, et continues sur cet intervalle.

1.1.8 Fonctions intégrables

Cela suggère la définition suivante.

Définition 9 *Une fonction f à valeurs complexes, définie sur $\mathbb{R}$, est* intégrable *si il existe une suite f_n de fonctions telles que*

1. *f_n est nulle hors d'un intervalle borné $[a_n, b_n]$.*
2. *f_n est continue sur $[a_n, b_n]$.*
3. *f est limite en distance L^1 des f_n.*

On appelle $L^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. Par construction, c'est un *espace vectoriel*, i.e., si a, $b \in \mathbb{C}$, f, $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $af + bg$ est intégrable.

Le terme *intégrable* est justifié par le fait qu'on peut intégrer ces fonctions sur $\mathbb{R}$.

Proposition 10 *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors, par passage à la limite, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$ est bien définie. C'est une application* linéaire*, i.e. si a, $b \in \mathbb{C}$,*

$$\int_{\mathbb{R}} (af(x) + bg(x))\,dx = a\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx + b\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx.$$

Preuve. Si f et g sont continues sur des intervalles fermés bornés et nulles en dehors, alors

$$|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx| \leq D(f, g).$$

Par conséquent, si f est la limite en distance L^1 d'une suite de fonctions f_n continues sur des intervalles fermés bornés et nulles en dehors, pour n et m grands, $|\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)b(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} f_m(x)b(x)\,dx|$ est petit, donc la suite $u_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)b(x)\,dx$ converge, sa limite est l'intégrale de f.■

Remarque 11 *Toutes les fonctions bornées imaginables sont limites en distance L^1 de fonctions continues. Par conséquent,* ***on pourra admettre***[1] *que le produit d'une fonction* bornée *par une fonction intégrable est intégrable. En particulier,* ***on pourra admettre*** *qu'une fonction f est intégrable si et seulement si son module $|f|$ l'est.*

Comme on l'a vu avec l'exemple 5, il y a des fonctions non bornées qui sont intégrables. Néanmoins, l'étape essentielle pour montrer qu'une fonction est intégrable consiste à majorer astucieusement sa valeur absolue.

[1] L'énoncé correct est que le produit d'une fonction bornée *mesurable* par une fonction intégrable est intégrable.

1.1.9 A retenir

1. Une équation aux dérivées partielles linéaire de la physique, écrite dans la bonne base de fonctions, se résoud par diagonalisation d'une matrice.
2. Pour passer de conditions initiales très particulières (dimension finie) aux conditions initiales générales (dimension infinie), il faut un passage à la limite.
3. Il est important de comprendre quand on a le droit ou pas de passer à la limite.
4. Il y a une classe de fonctions d'une variable réelle, les *fonctions intégrables*, pour lesquelles les passages à la limite se passent bien.

1.2 Théorèmes fondamentaux

1.2.1 Comment vérifier qu'une fonction est intégrable ?

La définition 9 est inutilisable. Voici la recette pour vérifier que les fonctions d'usage courant sont intégrables ou non.

Théorème 1 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue sauf en un nombre fini de points $a_1, \ldots, a_k$. Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si les intégrales généralisées*

$$\int_{\to -\infty}^{\to a_1} |f(x)|\,dx, \qquad \int_{\to a_1}^{\to a_2} |f(x)|\,dx, \qquad \ldots \qquad \int_{\to a_k}^{\to +\infty} |f(x)|\,dx$$

sont convergentes. Dans ce cas,

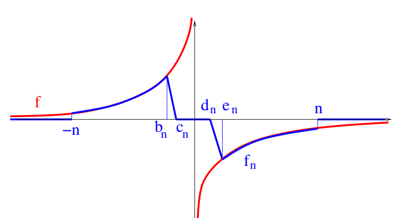
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\to -\infty}^{\to a_1} f(x)\,dx + \int_{\to a_1}^{\to a_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{\to a_k}^{\to +\infty} f(x)\,dx.$$

Preuve. Supposons d'abord f continue sur $\mathbb{R}$ (i.e. il n'y a aucun point de discontinuité a_j). On pose $f_n(x) = f(x)$ si $x \in [-n, n]$, $f_n(x) = 0$ sinon. Alors

$$D(f - f_n) = \int_{\to -\infty}^{-n} |f(x)|\,dx + \int_{n}^{\to +\infty} |f(x)|\,dx.$$

Si l'intégrale généralisée $\int_{\to -\infty}^{\to +\infty} |f(x)|\,dx$ est convergente, ces deux intégrales tendent vers 0, donc f_n converge en distance L^1 vers f, et f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Supposons que f présente une seule discontinuité a_1. On modifie la définition de f_n au voisinage de a_1 comme suit. On introduit les points $b_n = a_1 - \frac{1}{n}$, $c_n = a_1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{nf(a_1 - \frac{1}{n})}$, $d_n = a_1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{nf(a_1 + \frac{1}{n})}$ et $e_n = a_1 + \frac{1}{n}$. On pose $f_n(x) = f(x)$ si $x \in [-n, b_n]$ ou $x \in [e_n, n]$, $f_n(x) = 0$ si $x < -n$, si $x > n$ ou si $x \in [c_n, d_n]$, et on demande que f_n soit affine sur les intervalles $[b_n, c_n]$ et $[d_n, e_n]$, voir figure.



Par construction, les petits triangles de bases $[b_n, c_n]$ et $[d_n, e_n]$ ont chacun une aire égale à $1/2n$. Par conséquent,

$$\int_{b_n}^{c_n} |f_n(x)|\,dx = \int_{d_n}^{e_n} |f_n(x)|\,dx = \frac{1}{2n},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_{b_n}^{c_n} |f(x) - f_n(x)|\, dx &\leq \int_{b_n}^{c_n} (|f(x)| + |f_n(x)|)\, dx \leq \int_{b_n}^{\to a_1} |f(x)|\, dx + \frac{1}{2n}, \\
\int_{d_n}^{e_n} |f(x) - f_n(x)|\, dx &\leq \int_{d_n}^{e_n} (|f(x)| + |f_n(x)|)\, dx \leq \int_{\to a_1}^{e_n} |f(x)|\, dx + \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

Il vient

$$D(f, f_n) \leq \int_{\to -\infty}^{-n} |f(x)|\, dx + \int_{n}^{\to +\infty} |f(x)|\, dx + \int_{b_n}^{\to a_1} |f(x)|\, dx + \int_{\to a_1}^{e_n} |f(x)|\, dx + \frac{1}{n}.$$

Si les intégrales généralisées $\int_{-\infty}^{a_1} |f(x)|\, dx$ et $\int_{a_1}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ sont convergentes, les quatre intégrales tendent vers 0, donc f_n converge en distance L^1 vers f, et f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Cet argument s'étend à un nombre quelconque de discontinuïtés. On admettra la réciproque.■

Exemple 12 *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ si $x \notin [-1, 1]$, $f(x) = 0$ si $x \in [-1, 1]$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.*

En effet, f a deux discontinuités, -1 et 1. f est bornée au voisinage de -1 et de 1, donc les intégrales convergent à ces bornes, à droite comme à gauche. Les intégrales $\displaystyle\int^{\to +\infty} x^{-2}\, dx$ et $\displaystyle\int_{\to -\infty} x^{-2}\, dx$ sont convergentes, donc il y a convergence aux 6 bornes.

Exemple 13 *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$, n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.*

En effet, l'intégrale $\displaystyle\int_{\to 0} x^{-2}\, dx$ est divergente.

Exemple 14 *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$, n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.*

En effet, l'intégrale $\displaystyle\int^{\to +\infty} |\frac{\sin x}{x}|\, dx$ est divergente à la borne $+\infty$, bien que l'intégrale sans valeur absolue $\displaystyle\int_{\to +\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ soit convergente. Pour s'en convaincre, on minore $|\frac{\sin x}{x}|$ par $\frac{\sin^2 x}{x}$. Sachant que

$$\int_0^x \sin^2 t\, dt = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4},$$

une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
\int_0^y \frac{\sin^2 x}{x}\, dx &= [\frac{1}{2} - \frac{\sin(2x)}{4x}]_0^y + \int_0^y (\frac{1}{2x} - \frac{\sin(2x)}{4x^2})\, dx \\
&= \frac{1}{2}\ell n(y) + \frac{1}{2} - \frac{\sin(2y)}{4y} - \int_0^y \frac{\sin(2x)}{4x^2}\, dx.
\end{aligned}$$

La dernière intégrale possède une limite finie quand y tend vers l'infini, donc $\int_0^y \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$ tend vers $+\infty$, l'intégrale généralisée $\int_0^{\to +\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$ diverge à la borne $+\infty$, donc il en est de même de $\int_0^y |\frac{\sin x}{x}|\, dx$.■

1.2.2 Théorème de convergence dominée

Théorème 2 (H. Lebesgue). *Soit* $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \ldots$, *une suite de fonctions intégrables sur* $\mathbb{R}$ *telle que*

1. Convergence. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *la limite* $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$ *existe.*
2. Domination. *Pour tout* k, $|f_k| \leq g$ *où* g *est une fonction positive* indépendante de k.
3. Intégrabilité. g *est une fonction intégrable sur* $\mathbb{R}$.

Alors f *est intégrable sur* $\mathbb{R}$, *et*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} (\lim_{k\to\infty} f_k(x))\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx.$$

Le cours et les TD contiennent d'innombrables applications de ce théorème fondamental. On ne donne qu'un exemple montrant que les hypothèses 2 et 3 sont nécessaires.

Exemple 15 *Soit* f_k *la fonction qui vaut 1 sur l'intervalle* $[k, k+1[$ *et 0 ailleurs. Alors* $\lim_{k\to\infty} f_k = 0$ *mais* $\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\, dx = 1$ *ne tend pas vers 0.*

Ici il y a bien domination, les f_k sont majorées par la fonction g constante égale à 1, mais g n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

1.2.3 Conséquences du théorème de convergence dominée

Corollaire 16 Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre. *Soit* $f(x, s)$ *une fonction à valeurs complexes, définie pour* $x \in \mathbb{R}$ *et pour* $s \in]s_0, s_1[\subset \mathbb{R}$. *On suppose que pour tout* s *fixé dans* $]s_0, s_1[$, *la fonction* f *est intégrable sur* $\mathbb{R}$. *Pour* $s \in]s_0, s_1[$, *on pose*

$$F(s) = \int_{\mathbb{R}} f(x, s)\, dx.$$

On fait les hypothèses suivantes.

1. Continuité. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(x, s)$ *est continue en* s *;*
2. Domination. *Pour tout* $s \in]s_0, s_1$ *et tout* $x \in \mathbb{R}$, $|f(x, s)| \leq g(x)$ *où* g *est une fonction positive* indépendante de s.
3. Intégrabilité. g *est une fonction intégrable sur* $\mathbb{R}$.

Alors, $s \mapsto F(s)$ *est continue sur* $]s_0, s_1[$, *i.e.*

$$\lim_{s\to u} \int_{\mathbb{R}} f(x, s)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x, u)\, dx.$$

Corollaire 17 (Dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre). *Soit* $f(x, s)$ *une fonction à valeurs complexes, définie pour* $x \in \mathbb{R}$ *et pour* $s \in]s_0, s_1[\subset \mathbb{R}$. *On suppose que pour tout* s *fixé dans* $]s_0, s_1[$, *la fonction* f *est intégrable sur* $\mathbb{R}$. *Pour* $s \in]s_0, s_1[$, *on pose*

$$F(s) = \int_{\mathbb{R}} f(x, s)\, dx.$$

On fait les hypothèses suivantes.

1. Dérivabilité. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f(x, s)$ *est dérivable par rapport à* s *;*
2. Domination. *Pour tout* $s \in]s_0, s_1$ *et tout* $x \in \mathbb{R}$, $|\frac{\partial f}{\partial s}(x, s)| \leq g$ *où* g *est une fonction positive* indépendante de s.
3. Intégrabilité. g *est une fonction intégrable sur* $\mathbb{R}$.

Alors, F est dérivable par rapport à s, de dérivée

$$F'(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial s}(x, s)\, dx.$$

Autrement dit,

$$\frac{d}{ds} \int_{\mathbb{R}} f(x, s)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial s}(x, s)\, dx.$$

Remarque 18 *On peut dans le corollaire 2, substituer ($z \in D \subset \mathbb{C}$, D ensemble ouvert du plan complexe) à ($s \in]s_0, s_1[\subset \mathbb{R}$). Dans ces conditions $F(z)$ est une fonction holomorphe dans D.*

1.2.4 Intégrale sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

On peut intégrer les fonctions aussi sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Cela ne conduit à aucune difficulté particulière.

Définition 19 *Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. La* fonction caractéristique 1_E *de E est définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$1_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On dit que E est longueur finie *si 1_E est intégrable. Sa* longueur *(appelée aussi* mesure de Lebesgue*) est l'intégrale de 1_E,*

$$\text{longueur}(E) = \int_{\mathbb{R}} 1_E(x)\, dx.$$

Définition 20 *Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur E. On dit que f est* intégrable sur E *si $1_E f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et on pose*

$$\int_E f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} 1_E(x) f(x)\, dx.$$

Exemple 21 *Soit E un intervalle fermé borné. Une fonction continue sur E est automatiquement intégrable sur E.*

Proposition 22 Relation de Chasles. *Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Soit f une fonction intégrable sur E. Alors*

$$\int_E f(x)\, dx = \int_{E_1} f(x)\, dx + \int_{E_2} f(x)\, dx.$$

1.2.5 Propriétés vraies presque partout

On admettra le résultat suivant.

Proposition 23 *Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est de longueur finie si et seulement si on peut le recouvrir par une suite d'intervalles $]a_1, b_1[$, $]a_2, b_2[, \ldots$ dont la longueur totale*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k| < +\infty \tag{1.3}$$

est finie. La longueur de E est alors la borne inférieure des sommes (1.3) sur tous les recouvrements possibles.

Il existe des ensembles dont la longueur totale est nulle, mais qui ont néanmoins une infinité d'éléments. Par exemple, l'ensemble des points d'une suite. Mais il en existe aussi qui ne sont contenus dans l'ensemble des points d'aucune suite. G. Cantor en a construit un exemple fameux.

Définition 24 *On dit qu'une propriété relative à des nombres réels est vraie* presque partout *ou* pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, *si l'ensemble des réels pour lesquels elle est fausse est de longueur nulle.*

1.2.6 Intégrale et primitive

En intégrant une fonction intégrable, on en obtient une primitive.

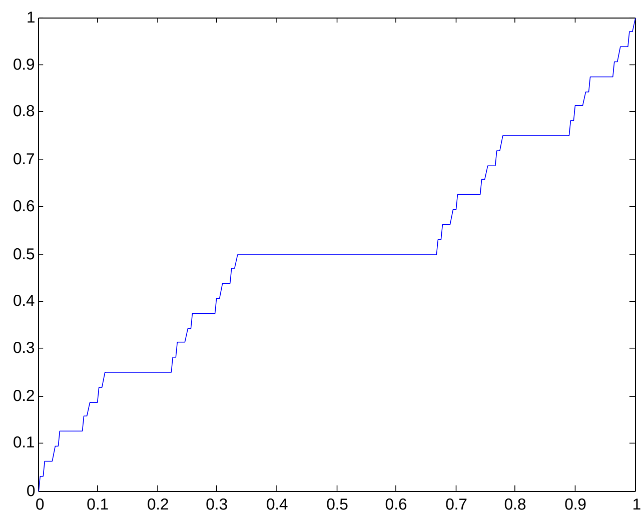
Théorème 3 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $F(y) = \int_{]-\infty,y]} f(x)\,dx$. Alors*

1. *F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, F est dérivable en y, de dérivée $F'(y) = f(y)$.*

Remarque 25 *Il existe des fonctions continues, dérivables presque partout, mais telles que*

$$f(x) - f(a) \neq \int_{[a,x]} f'(x)\,dx.$$

G. Cantor en a construit un exemple célèbre, connu parfois sous le nom d'escalier du diable.



Cette fonction continue est dérivable presque partout, avec une dérivée nulle, mais elle n'est pas constante.

Définition 26 *Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, est dite* absolument continue *s'il existe une fonction f intégrable sur tout intervalle borné telle que pour tous x et $a \in \mathbb{R}$,*

$$F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} f(t)\,dt.$$

Remarque 27

1. *Une fonction dérivable n'est pas toujours absolument continue. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin x^{-2}, & si\ x \neq 0; \\ 0, & si\ x = 0, \end{cases}$$

a une dérivée qui n'est pas intégrable.

2. *D'après le théorème 3, une fonction absolument continue F est dérivable presque partout, et sa dérivée est presque partout égale à f. D'une manière lapidaire,* une fonction absolument continue est une fonction qui est "égale à l'intégrale de sa dérivée".

Proposition 28 Intégration par parties. *Soient F et G deux fonctions absolument continues sur $[a,b]$, de dérivées respectives f et g. On a*

$$\int_{[a,b]} F(x)g(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_{[a,b]} f(x)G(x)\,dx.$$

Preuve. C'est une application du théorème de Fubini-Tonelli (voir section suivante). ■

1.3 Intégrales multiples

1.3.1 Intégrabilité

Toutes les notions et résultats des sections précédentes s'étendent aux fonctions de plusieurs variables. Pour alléger les notations, on ne traite que les fonctions de deux variables, les définitions et énoncé généraux sont faciles à deviner à partir de ce cas particulier.

Définition 29 *Si f et g sont des fonctions continues sur un carré $[-a,a]\times[-a,a]$ et nulles en dehors,*

$$D(f,g) = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} |f(x,y) - g(x,y)|\,dx\,dy.$$

Une fonction de deux variables est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ *si elle est limite en distance L^1 de fonctions continues sur des carrés et nulles en dehors. Par passage à la limite, on définit l'intégrale d'une fonction intégrable de deux variables.*

Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur E. On dit que f est intégrable sur E *si $1_E f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et on pose*

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}_2} 1_E(x,y) f(x,y)\,dx\,dy.$$

Définition 30 *Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$ est* d'aire finie *si 1_E est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Son* aire *(appelée* volume *en dimension 3 et* mesure de Lebesgue *en toute dimension) est*

$$aire(E) = \int_{\mathbb{R}_2} 1_E(x,y)\,dx\,dy = \int_E dx\,dy.$$

Une propriété relative à des points du plan est vraie presque partout *ou* pour presque tout point du plan *si l'ensemble des points du plan pour lesquels elle est fausse est d'aire nulle.*

Le théorème de convergence dominée et ses conséquences s'étendent aux fonctions de plusieurs variables.

1.3.2 Théorème de Fubini-Tonelli

Comme pour les fonctions d'une variable, la définition 29 est inutilisable, et il faut un théorème pour vérifier que les fonctions d'usage courant sont intégrables, c'est le théorème de Fubini-Tonelli. Le théorème permet de plus de calculer des intégrales de plusieurs manières différentes.

Théorème 4 (Fubini-Tonelli). *Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ une fonction. On fait les hypothèses suivantes.*

- *Pour presque tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $y\mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.*
- *La fonction $x\mapsto F(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\,dy$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.*

Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

Réciproquement, si f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, alors

- *Pour presque tout $y\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.*

– *La fonction* $y \mapsto G(y) = \int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\,dx$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$.
–
$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Voici une façon moins rigoureuse mais moins lourde de formuler le théorème, dans le cas des fonctions positives.

Corollaire 31 *Soit f une fonction* positive *de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.*
– *Si l'une des trois expressions suivantes est finie*
$$I = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy, \quad II = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right) dx, \quad III = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \right) dy,$$
les deux autres sont aussi finies, f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, et de plus $I = II = III$.
– *Si l'une de ces trois expressions n'est pas finie, les deux autres ne le sont pas non plus et f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^2$.*

Exemple 32 *Preuve de la formule d'intégration par parties, proposition 28.*

Par hypothèse,
$$F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} f(t)\,dt, \quad G(x) = G(a) + \int_{[a,x]} g(t)\,dt.$$

Introduisons $\tilde{F}(x) = \int_{[a,x]} |f(t)|\,dt$. Comme f est intégrable sur $[a,b]$, pour tout $x \in [a,b]$,
$$|\tilde{F}(x)| \leq \int_{[a,b]} |f(t)|\,dt,$$
donc $\tilde{F}$ est bornée. On écrit
$$\begin{aligned}\int_{[a,b]} F(x)g(x)\,dx &= \int_{[a,b]} F(a)g(x)\,dx + \int_{[a,b]} (\int_{[a,x]} f(t)\,dt) g(x)\,dx \\ &= F(a)(G(b) - G(a)) + \int_{[a,b]} (\int_{[a,x]} f(t)g(x)\,dt)\,dx.\end{aligned}$$

On définit une fonction h sur $[a,b] \times [a,b]$ par $h(x,t) = f(t)g(x)1_T(x,t)$ où $T = \{(x,t) \,|\, a \leq t \leq x \leq b\}$. Alors pour tout x, h est intégrable en t. L'intégrale par rapport à t du module de h vaut $\tilde{F}(x)g(x)$. Comme $\tilde{F}$ est bornée et g est intégrable, le produit est intégrable. Le théorème de Fubini-Tonelli garantit que h est intégrable sur $[a,b] \times [a,b]$, et que
$$\int_{[a,b]} (\int_{[a,b]} h(x,t)\,dt)\,dx = \int_{[a,b]\times[a,b]} h(x,t)\,dx\,dt.$$

Autrement dit,
$$\int_{[a,b]} F(x)g(x)\,dx = F(a)(G(b) - G(a)) + \int_T f(t)g(x)\,dx\,dt. \tag{1.4}$$

De même,
$$\int_{[a,b]} G(x)f(x)\,dx = G(a)(F(b) - F(a)) + \int_T g(t)f(x)\,dx\,dt. \tag{1.5}$$

En changeant les variables de nom (on change t en x et x en t), il vient
$$\int_T g(t)f(x)\,dx\,dt = \int_{T'} g(x)f(t)\,dx\,dt,$$

où $T' = \{(x,t)\,|\,a \le x \le t \le b\}$. Remarquer que $T \cup T' = [a,b] \times [a,b]$ et que $T \cap T'$, la diagonale du carré, est d'aire nulle. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\int_T g(t)f(x)\,dx\,dt + \int_T f(t)g(x)\,dx\,dt &= \int_{T\cup T'} f(t)g(x)\,dx\,dt \\
&= \int_{[a,b]\times[a,b]} f(t)g(x)\,dx\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} 1_{[a,b]}(t)f(t)1_{[a,b]}(x)g(x)\,dx\,dt \\
&= (\int_{\mathbb{R}} 1_{[a,b]}(t)f(t)\,dt)(\int_{\mathbb{R}} 1_{[a,b]}(x)g(x)\,dx) \\
&= (F(b)-F(a))(G(b)-G(a)).
\end{aligned}$$

En additionnant (1.4) et (1.5), on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} F(x)g(x)\,dx \quad + \quad & \int_{[a,b]} G(x)f(x)\,dx \\
&= F(a)G(b) + G(a)F(b) - 2F(a)G(a) + \int_{T\cup T'} f(t)g(x)\,dx\,dt \\
&= F(a)G(b) + G(a)F(b) - 2F(a)G(a) + (F(b)-F(a))(G(b)-G(a)) \\
&= F(b)G(b) - F(a)G(a).\blacksquare
\end{aligned}$$

1.3.3 Changement de variables

Nous nous limiterons ici au cas d'un changement de variable régulier, i.e. dont les composantes admettent des dérivées partielles continues.

Théorème 5 *Soit ϕ une application* bijective *d'un ouvert A de l'espace des $(x_1, \cdots x_n)$ sur un ouvert $B = \phi(A)$ de l'espace des $(y_1, \cdots y_n)$, définie par les n fonctions ϕ_i suivantes :*

$$y_i = \phi_i(x_1, \cdots, x_n) \qquad i = 1, \cdots n,$$

où les ϕ_i sont définies, continues, à dérivées partielles du premier ordre continues *sur A.*
Soit $J_\phi(x_1, \cdots x_n)$ le jacobien de l'application ϕ, i.e. le déterminant

$$J_\phi(x_1 \cdots x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Pour que $f(y_1 \cdots y_n)$ soit intégrable sur l'ensemble $\phi(A)$, il faut et il suffit que la fonction de $\vec{x}$, $f(\phi_1(x_1 \cdots x_n), \cdots, \phi_n(x_1 \cdots x_n))$, multipliée par $|J_\phi(x_1 \cdots x_n)|$, soit intégrable sur A. On a alors

$$\int_{\phi(A)} f(\vec{y})\,dy_1 \cdots dy_n = \int_A f(\phi_1(\vec{x}) \cdots \phi_n(\vec{x}))|J_\phi(\vec{x})|\,dx_1 \cdots dx_n.$$

1.3.4 Lien entre intégrale et mesure

Pour les fonctions de plusieurs variables comme pour les fonction d'une variable réelle, l'intégrale s'exprime comme volume de la région comprise entre le graphe et un plan.

Proposition 33 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une fonction. Dire que f est intégrable revient à dire que si $f = f^+ + f^-$, où f^+ (resp. f^-) est la partie positive (resp. négative) de f, alors*

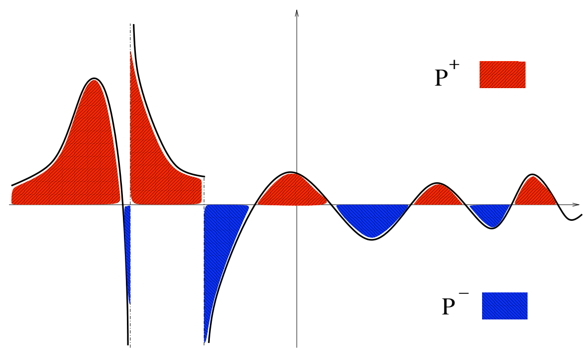
- *L'ensemble $P^+ = \{(\vec{x}, y)\,|\,0 \le y < f^+(\vec{x})\}$, a une mesure finie pour la mesure de Lebesgue sur R^{n+1}.*

– *L'ensemble $P^- = \{(\vec{x}, y) \,|\, f^-(\vec{x}) < y \leq 0\}$, a une mesure finie pour la mesure de Lebesgue sur R^{n+1}.*

Si tel est le cas,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})\, d^n x = A^+ - A^-,$$

où $A^+(A^-)$ sont les mesures de Lebesgue respectives des ensembles $P^+(P^-)$.



1.3.5 A retenir

Pour montrer qu'une fonction f d'une variable réelle est intégrable,

– On remarque qu'elle est continue sauf en un nombre finie de points.
– On étudie la convergence de l'intégrale généralisée de f sur chacun des morceaux, à chaque borne.

Pour montrer qu'une fonction f de deux variables réelles est intégrable,

– On remarque qu'elle est continue par morceaux en chaque variable.
– On étudie l'intégrabilité en une variable (méthode précédente).
– On étudie l'intégrabilité de l'intégrale par rapport à une variable comme fonction de l'autre variable (méthode précédente).
– On applique le théorème de Fubini-Tonelli.

Eventuellement, il peut être utile d'effectuer préalablement un changement de variable.

1.4 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

1.4.1 Définition

Définition 34 *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. On appelle* transformée de Fourier de f, *la fonction Ff de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, définie, pour $u \in \mathbb{R}$, par l'intégrale*

$$(Ff)(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi ux} f(x)\, dx.$$

Remarque 35

1. *Cette fonction Ff est définie pour tout $u \in \mathbb{R}$ car l'intégrale est finie pour tout u réel. En effet,*

$$|\exp(-2i\pi ux) f(x)| = |f(x)|,$$

et, par hypothèse, $|f|$ est intégrable.

2. *Les notations pour la transformée de Fourier sont nombreuses :*

$$(Ff)(u) = (TFf)(u) = \hat{f}(u) = \cdots$$

3. *Les conventions sont encore plus nombreuses, elles sont toutes de la forme*

$$(Ff)(u) = a^{-1} \int_{\mathbb{R}} \exp(-2ibxu) f(x)\, dx,$$

où les coefficients numériques a et b contiennent un nombre varié de puissances de 2 et de π. Prendre garde à la convention adoptée dans l'ouvrage que vous consultez

4. *En physique, si $f(x)$ représente l'amplitude d'un signal, $(Ff)(u)$ représente sa distribution en fréquences (ou nombres d'ondes...). C'est la* distribution spectrale *du signal f. L'ensemble des points u de $\mathbb{R}$ tels que $(Ff)(u) \neq 0$ est appelé* spectre *de f.*

Nous admettrons sans démonstration (celle-ci utilise le théorème de Fubini-Tonelli) la propriété suivante.

Proposition 36 *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors*

$$(Ff)(u) = 0 \ \forall u \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0 \text{ presque partout.}$$

Son interprétation physique est interessante. Pour un signal intégrable, *si la fonction spectrale est nulle*, le signal est *nul physiquement* car mathématiquement nul presque partout.

1.4.2 Théorème de Riemann-Lebesgue

Théorème 6 (Riemann-Lebesgue)*. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, alors*

1. *Ff est* bornée *sur $\mathbb{R}$.*
2. *Ff est* continue *sur $\mathbb{R}$.*
3. *$(Ff)(u)$* tend vers *0 quand u tend vers $\pm\infty$.*

Preuve.

1. $|(Ff)(u)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx < \infty$.
2. Exercice : appliquer le théorème de continuité sous le signe somme (Corollaire 16).
3. C'est la partie la plus longue de la démonstration, nous ne la donnerons pas. On pourra cependant vérifier que la propriété est vraie pour tous les exemples qui vont suivre.■

Remarque 37 *En physique, ce théorème donne le comportement à l'infini de la distribution spectrale d'un signal intégrable. Il veut dire aussi que si* une seule *des trois conditions indiquées n'est pas réalisée, le signal* n'est pas *une fonction intégrable.*

1.4.3 Formule de Plancherel

Proposition 38 Formule de Plancherel*. Soient f et g des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)(Fg)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} (Ff)(y)g(y)\,dy. \tag{1.6}$$

Preuve. On applique le théorème de Fubini-Tonelli à la fonction $h(x,y) = f(x)e^{-2i\pi xy}g(y)$. Pour tout x, c'est une fonction intégrable de y, car $|h(x,y)| = |f(x)||g(y)|$ et g est intégrable. L'intégrale en y du module de h est $f(x)\int_{\mathbb{R}} |g(y)|\,dy$, qui est intégrable en x, car f est intégrable. Par conséquent, h est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Intégrer d'abord en y puis en x donne le premier membre de (1.6). Intégrer d'abord en x puis en y donne le second membre.■

1.4.4 Transformée de Fourier inverse

Le résultat principal est ici un résultat négatif.
La transformée de Fourier d'une fonction intégrable n'est pas nécessairement intégrable.

Exemple 39 *Soit $f(x) = 1$ pour $|x| \leq a$ et $f(x) = 0$ pour $|x| > a$. Alors*

$$(Ff)(u) = \frac{\sin 2\pi ua}{\pi u},$$

qui n'est pas intégrable *sur $\mathbb{R}$ (cf. Exemple 14).*

En fait, *il n'existe pas* de formule d'inversion valable *pour toute* fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$. On a cependant le théorème suivant.

Théorème 7 *Si Ff est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} Ff(u) e^{2i\pi ux}\, du.$$

Remarque 40 1. *Il y a un* sous-espace *de l'espace $L^1(\mathbb{R})$ qui admet une formule d'inversion, c'est l'espace de Schwartz S, décrit en appendice.*

2. *Il y a des* espaces différents *(l'espace des fonctions dont le carré du module est intégrable sur $\mathbb{R}$) ou* plus vastes *(les distributions tempérées) où opèrent des transformations de Fourier et qui admettent des formules d'inversion (en un sens bien spécifique cependant).*

1.4.5 Propriétés de Ff pour f intégrable sur $\mathbb{R}$

1. *Linéarité*. Pour a, $b \in \mathbb{C}$ et f, g intégrables,
$$F(af + bg) = a(Ff) + b(Fg).$$
2. *Réalité*.
   – Si f est à valeurs réelles, (Ff) a la *symétrie hermitienne* suivante
$$(Ff)(-u) = \overline{(Ff)(u)}.$$
   – Si f a la symétrie hermitienne, Ff est une fonction à valeurs réelles.
3. *Parité*. Si f est paire (impaire), (Ff) est paire (impaire).
4. *Réalité et parité*. Si f est réelle et paire, (Ff) l'est aussi.
5. *Translation et modulation*
   – Si $(\tau_z f)(x) = f(x - z)$ définit la translatée $\tau_z f$ de f d'une quantité z, on a
$$(F\tau_z f)(u) = e^{-2i\pi uz}(Ff)(u).$$
   – Pour f intégrable sur $\mathbb{R}$, posons $h_v(x) = e^{2i\pi vx} f(x)$, où $v \in \mathbb{R}$, on a
$$(Fh_v)(u) = (Ff)(u - v).$$
6. *Dilatation*. Pour f intégrable sur $\mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, posons $(d_a f)(x) = f(\frac{x}{a})$. On a
$$(Fd_a f)(u) = |a|(Ff)(au).$$

Preuve. Changement de variable.■

Remarque 41 *Les dilatations portant sur f et Ff vont* en sens inverse *l'une de l'autre, ce qui veut dire que si on étale f d'un facteur a^{-1}, on va contracter Ff d'un facteur a. L'interprétation physique de cette propriété mathématique est claire :* La fonction spectrale d'un signal est d'autant plus étalée que le signal est étroit.

Proposition 42 *Soit f_k, $k = 1, 2, \dots$ une suite de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ qui convergent en distance L^1 vers f. Alors les fonctions Ff_k convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers Ff.*

Preuve. Pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |(Ff)(u) - (Ff_k)(u)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xu} (f(x) - f_k(x))\, dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_k(x)|\, dx = D(f, f_k).\blacksquare \end{aligned}$$

1.4.6 Exemples

$f(x)$	$Ff(u)$	
$e^{-b\|x\|} \quad (b>0)$	$\dfrac{2b}{4\pi^2u^2+b^2}$	(1)
$\dfrac{1}{x^2+a^2} \quad (a>0)$	$\dfrac{\pi}{a}e^{-2\pi a\|u\|}$	(2)
$e^{-ax^2} \quad (a>0)$	$(\pi/a)^{\frac{1}{2}}\exp(-\pi^2u^2/a)$	(3)
$\Pi(x)$	$\dfrac{\sin(2\pi ua)}{\pi u}$ et $F\Pi(0)=0$	(4)

où la fonction Π est la *fonction porte* définie par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq a; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 43 *La transformée de Fourier $F(f)$ d'une fonction intégrable f n'est pas toujours une fonction intégrable, comme le montre l'exemple de la fonction Π.*

1.4.7 Comportement à l'infini de f et dérivabilité de Ff

On démontre facilement que si f et xf sont *intégrables*, alors Ff est *dérivable* et

$$(Ff)'(u) = (F[-2i\pi xf])(u).$$

Plus généralement, on a la proposition suivante.

Proposition 44 *Si $f, xf, \ldots, x^pf$ sont intégrables, alors (Ff) admet des dérivées jusqu'à l'ordre p et, pour $k = 1, 2, \ldots p$,*

$$(Ff)^{(k)}(u) = (F[(-2i\pi x)^kf])(u).$$

Inversement, la transformée de Fourier de la dérivée f' s'obtient au moyen de celle de f dès que f est absolument continue et f' intégrable.

Proposition 45 *Soit f une fonction absolument continue sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée f' (qui existe presque partout) est intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors*

$$(Ff')(u) = 2i\pi u(Ff)(u).$$

Généralisation : Si f est intégrable, si sa dérivée $p-1$-ème $f^{(p-1)}$ est absolument continue, et si les dérivées successives f', f'', $f^{(3)}$,$f^{(p)}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, alors, pour $k = 1, 2, \cdots p$,

$$(Ff^{(k)})(u) = (2i\pi u)^k(Ff)(u).$$

1.5 Convolution dans $L^1(\mathbb{R})$

1.5.1 Motivation

La convolution est le cadre mathématique qui permet de décrire la réponse d'un certain type de systèmes physiques à des excitations appartenant elles-mêmes à une classe bien définie.

Considérons par exemple un circuit électrique passif RLC classique. Supposons qu'à l'instant $t = 0$ on lui applique une force électromotrice $e(t)$ donnée pour toutes les valeurs de $t \geq 0$. Il s'établit un courant variable d'intensité $i(t)$. Nous supposerons que $e(t)$ et $i(t)$ sont deux fonctions nulles pour $t < 0$. On sait que dans des limites physiquement raisonnables, il existe une **réponse** donnée $i(t)$ pour chaque **excitation** $e(t)$ donnée, ce qui en fait nous définit un **opérateur** qui à chaque $e(t)$ fait correspondre $i(t)$. Pour un très grand nombre de systèmes physiques, et pas seulement le circuit RLC, on s'attend à ce que l'opérateur en question possède les propriétés suivantes

1. *Linéarité.* Si aux excitations e_1 et e_2 correspondent respectivement les réponses i_1 et i_2, à l'excitation $ae_1 + be_2$, où a, $b \in C$, correspond la réponse $ai_1 + bi_2$.
2. *Invariance par translation dans le temps.* Cela veut dire que si la réponse est i pour une excitation e, alors pour l'excitation $e_z(t) = (\tau_z e)(t) = e(t-z)$ décalée dans le temps, la réponse sera décalée d'autant, $i_z = \tau_z i$. Autrement dit, les propriétés du système ne varient pas au cours du temps.
3. *Passivité.* Cette propriété exprime le fait que si e est nulle pour $t < 0$, alors i l'est aussi.

On peut alors montrer que le système peut être décrit par une sorte de matrice M, i.e.

$$i(t) = \int_{\mathbb{R}} M_{t,t'} e(t')\, dt'.$$

L'invariance par translation dans le temps entraîne que le coefficient de matrice $M_{t,t'}$ ne dépend en fait que de $t - t'$, $M_{t,t'} = \phi(t - t')$. La formule

$$i(t) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t - t') e(t')\, dt'.$$

s'appelle un produit de convolution. La fonction ϕ, appelée *réponse impulsionnelle* du système, est l'intensité obtenue lorsque e est une impulsion unité infiniment courte. On verra en janvier comment donner un sens précis à cette phrase.

1.5.2 Définition

Définition 46 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. On appelle* convolution *de f et de g, la fonction k définie par l'intégrale*

$$k(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x - t)\, dt.$$

On note $k = f \star g$.

Le fait que l'intégrale soit définie ne va pas de soi. C'est une conséquence remarquable du théorème de Fubini-Tonelli, voir plus loin. En effet, le produit de deux fonctions intégrables n'est pas intégrable en général.

Exemple 47 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{-1/2}$ pour $x \in]0, 1]$, et $f(x) = 0$ sinon. Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}$, mais f^2 ne l'est pas. Autrement dit, $(f \star f)(x)$ n'est pas définie en $x = 0$, mais l'est pour tout $x \neq 0$.*

En effet, l'intégrale généralisée $\int_{\to 0} x^{-1/2}\, dx$ est convergente à la borne 0, mais $\int_{\to 0} x^{-1}\, dx$ ne l'est pas.

1.5.3 Propriétés de la fonction convolution

Proposition 48 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$.*

1. *Le nombre $(f \star g)(x)$ est défini pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.*
2. *La fonction $f \star g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.*
3. *Si f est de plus une fonction* bornée*, alors $f \star g$ est continue et bornée.*

Preuve. 1. On applique le théorème de Fubini-Tonelli à $h(x, t) = f(t) g(x - t)$. Pour tout t, c'est une fonction intégrable de x, la translatée $\tau_t g : x \mapsto g(x - t)$ est intégrable. L'intégrale en x du module de h vaut $f(t) \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, dx$, car translater une fonction ne change pas son intégrale. C'est donc une fonction intégrable de x. Par conséquent, la fonction h est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, et pour presque tout x, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En particulier, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} h(x,t)\,dx = (f\star g)(x)$ est bien définie.

2. De plus, la fonction $|h|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, donc, toujours d'après le théorème de Fubini-Tonelli, la fonction $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} |h(x,t)|\,dt$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Comme

$$|(f\star g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |h(x,t)|\,dt,$$

cela entraîne que $f\star g$ est intégrable elle aussi.

3. On admettra ces propriétés plus difficiles.■

1.5.4 Propriétés algébriques du produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$

Proposition 49 *Soient f, g et h des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$.*

1. Commutativité

$$f\star g = g\star f.$$

2. Distributivité

$$f\star(ag+bh) = a(f\star g) + b(f\star h).$$

3. Associativité

$$f\star(g\star h) = (f\star g)\star h.$$

On dit que $L^1(\mathbb{R})$ forme une algèbre pour l'addition et le produit $\star$, appelée algèbre de convolution.

Preuve. 1. Dans l'intégrale qui définit $f\star g$, on fait le changement de variables $u = x - t$.

2. Cela résulte de la linéarité de l'intégrale, proposition 10.

3. Dans l'intégrale double qui définit $f\star(g\star h)(y) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)(\int_{\mathbb{R}} g(t)h(y-x-t)\,dt)\,dx$, on fait le changement de variables $u = x + t$. L'intégrale devient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)(\int_{\mathbb{R}} g(u-x)h(y-u)\,du)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}} f(x)g(u-x)h(y-u)\,du\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} f(x)g(u-x)h(y-u)\,dx)\,du \\
&= \int_{\mathbb{R}} (f\star g)(u)h(y-u)\,du \\
&= ((f\star g)\star h)(y).■
\end{aligned}$$

1.5.5 Produit de convolution et transformation de Fourier

Théorème 8 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. Alors*

$$F(f\star g) = (Ff)(Fg).$$

Preuve. On applique le théorème de Fubini-Tonelli à la fonction $h(x,t) = e^{-2i\pi xu} f(t)g(x-t)$. Pour tout t, c'est une fonction intégrable de x. L'intégrale en x de son module vaut $|f(t)|\int_{\mathbb{R}} |g(x-$

$t)|\,dt = |f(t)|\int_{\mathbb{R}}|g(x)|\,dx$. C'est une fonction intégrable de t, car f est intégrable. Par conséquent, h est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, et

$$\begin{aligned} F(f\star g)(u) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xu}(\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} h(x,t)\,dt\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t)(\int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xu}g(x-t)\,dx)\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t)(F\tau_t g)(u)\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi ut}(Fg)(u)\,dt \\ &= (Fg)(u)(Ff)(u).\blacksquare \end{aligned}$$

Autrement dit, la transformation de Fourier F réalise un homomorphisme algébrique de l'algèbre de convolution $L^1(\mathbb{R})$ (avec les opérations $\star$ et $+$) dans[2] l'algèbre des fonctions continues et bornées qui tendent vers zéro à l'infini (opérations de multiplication et d'addition ordinaires).

1.5.6 Retour sur l'équation de la chaleur

A titre d'illustration des outils introduits jusqu'à présent, on résoud l'équation de la chaleur sur un fil infiniment long, pour une donnée initiale intégrable.

Proposition 50 *Soit $f(x,t)$, $x\in\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{R}_+$, une solution de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$. On fait les hypothèses suivantes.*

1. *Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, f_t est intégrable.*
2. *Pour tous $0<T<T'$, pour $t\in[T,T']$, les fonctions $f_t : x\mapsto f(x,t)$ sont dominées par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, ainsi que leurs dérivées par rapport au temps $\frac{\partial f_t}{\partial t}$.*
3. *Lorsque t tend vers 0, f_t tend vers f_0 en distance L^1.*

Alors $f(x,t)$ est donnée par la formule intégrale suivante

$$f(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} e^{-(x-y)^2/4ct} f(y,0)\,dy \tag{1.7}$$

Réciproquement, si $x\mapsto f(x)$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, la formule (1.7) définit une solution de l'équation de la chaleur qui satisfait aux conditions 1, 2, et 3.

Preuve. Soit $f(x,t)$ une solution de l'équation de la chaleur qui satisfait aux conditions 1, 2, et 3. La proposition 42 entraîne que pour tout $u\in\mathbb{R}$, $(Ff_t)(u)$ tend vers $(Ff_0)(u)$ quand t tend vers 0. Le théorème de continuïté d'une intégrale dépendant d'un paramètre (Corollaire 16) entraîne que pour tout $u\in\mathbb{R}$, $(Ff_t)(u)$ dépend continûment de t pour $t>0$ aussi. Le théorème de dérivation sous le signe somme (Corollaire 17) entraîne

$$F\frac{\partial f_t}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(Ff_t).$$

Par hypothèse, $\frac{\partial^2 f_t}{\partial x^2} = c^{-1}\frac{\partial f_t}{\partial t}$ est intégrable, donc la proposition 45 donne

$$F\frac{\partial^2 f_t}{\partial x^2}(u) = (2i\pi u)^2(Ff_t)(u).$$

[2] Inclusion *stricte*, car par exemple la fonction $f(t) = t/(1+|t|)\ell n(|t|)$ n'est l'image d'aucune fonction intégrable par F.

Par conséquent, pour tout $u \in \mathbb{R}$ et tout $t > 0$,

$$\frac{\partial}{\partial t}(Ff_t)(u) = c(2i\pi u)^2 (Ff_t)(u).$$

La solution de cette équation différentielle est

$$(Ff_t)(u) = e^{c(2i\pi u)^2 t}(Ff_0)(u).$$

D'après le tableau du paragraphe 1.4.6, si $t > 0$, $u \mapsto e^{c(2i\pi u)^2 t}$ est la transformée de Fourier de la fonction p_t définie sur $\mathbb{R}$ par

$$p_t(x) = (1/4\pi ct)^{\frac{1}{2}} \exp(-x^2/4ct).$$

Cette fonction est intégrable. Comme f_0 est aussi intégrable, d'après le théorème 8,

$$(Fp_t)(Ff_0) = F(p_t \star f_0).$$

Avec la proposition 36, on conclut que $f_t = p_t \star f_0$, i.e. pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_t(x) = \int_{\mathbb{R}} p_t(x-y) f(y,0)\, dy.$$

Comme f_t et le produit de convolution sont continus, c'est vrai pour tout x, c'est la formule intégrale annoncée.

Réciproquement, soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. La formule (50) définit une fonction sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. Comme, pour $t > 0$, la fonction p_t est intégrable sur $\mathbb{R}$, $f_t = p_t \star f$ est intégrable. Posons

$$h(x,y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} e^{-(x-y)^2/4ct} f(y) = p_t(x-y) f(y). \tag{1.8}$$

On vérifie aisément que

$$\frac{\partial p_t}{\partial t} = c \frac{\partial^2 p_t}{\partial x^2}.$$

Pour $t \in [T, T']$, la fonction p_t est bornée par la constante $M_T = \sup p_T = \frac{1}{\sqrt{4\pi cT}}$. De même, $\frac{\partial p_t}{\partial t}$ est bornée par la constante $M'_T = \sup \frac{\partial p_t}{\partial t}_{|t=T}$. Par conséquent, h est dominée par la fonction $M_T f$, $\frac{\partial h}{\partial t}$ est dominée par la fonction $M'_T f$. Ces fonctions sont indépendantes de t et intégrables. Par conséquent f_t est continue, dérivable par rapport à t, deux fois dérivable par rapport à x, et

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = c \frac{\partial^2 f_t}{\partial x^2}.$$

La même majoration donne la domination de f_t et de $\frac{\partial f_t}{\partial t}$. Il reste à prouver la convergence en distance L^1 de f_t vers f quand t tend vers 0. On ne le fera pas ici (cela ne résulte pas directement du théorème de convergence dominée). Dans le chapitre sur les distributions, on démontrera sans effort un résultat plus faible, la convergence au sens des distributions de f_t vers f quand t tend vers 0.■

Interprétation. Notons A_t l'opérateur qui à une fonction intégrable f associe la fonction f_t, solution au temps t de l'équation de la chaleur de condition initiale f (lorsque $f > 0$, f modélise une distribution de température, et f_t est température obtenue après qu'on a laissé la chaleur diffuser pendant un temps t). On constate que

$$A_t f = p_t \star f,$$

comme suggéré au paragraphe 1.5.1. Toutefois, ici, le temps est fixé et la variable x est une variable d'espace. La fonction p_t ne s'interprète pas comme une réponse impulsionnelle, mais comme le résultat de la diffusion en temps t d'une quantité unité de chaleur déposée au point 0. On appelle la famille de fonctions p_t le *noyau de la chaleur*, ou la *solution fondamentale* de l'équation de la chaleur.

1.6 Supplément : L'espace de Schwartz S

1.6.1 Définition

Définition 51 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est un élément de l'espace S si*
- $\frac{d^m}{dx^m} f(x) = f^{(m)}(x)$ *existe pour tout* $m = 0, 1, \ldots$.
- *pour tous les entiers p et q, il existe une constante $C_{p,q}$ (dépendant de f) telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$|x^p f^{(q)}(x)| < C_{p,q}.$$

Exemple 52 *Les fonctions propres, d'énergie donnée, de l'oscillateur harmonique en mécanique quantique sont dans S :*

$$f_n(x) = H_n(x) e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

où H_n est un polynôme de degré n en x (polynôme d'Hermite).

Exemple 53 *Le noyau de la chaleur*

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$$

(voir proposition 50) appartient à S pour tout $t > 0$.

1.6.2 Propriétés

1. L'ensemble S est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
2. Les fonctions $g_{pq}(x) = x^p f^{(q)}$ sont aussi dans S pour $p, q = 0, 1, \ldots$
3. Les fonctions $g_{pq}(x) = x^p f^{(q)}(x)$ pour $p, q = 0, 1, \cdots$, sont intégrables.
4. La fonction $(Ff)(u)$ est définie pour $u \in \mathbb{R}$ et, pour $k = 0, 1, \ldots$,

$$(Ff)^{(k)}(u) = F[(-2i\pi x)^k f](u).$$

Théorème 9 *Si f appartient à S, alors $F(f)$ appartient à S. Réciproquement, tout élément de f est la transformée de Fourier d'un élément de S. Autrement dit, la transformation de Fourier est une bijection de S sur S, dont la réciproque est donnée par la formule*

$$(F^{-1}g)(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi ux} g(x)\, dx.$$

Preuve. D'après la Proposition 44, $\frac{d^p}{dx^p}(Ff)(u)$ est définie pour $p = 1, 2, \ldots$.
Soit $h(x) = (-2i\pi x)^p f(x)$. Alors la dérivée d'ordre q

$$\frac{d^q}{dx^q}[x^p f(x)] = \sum_m \frac{q!}{m!(q-m)!} (x^p)^{(m)} f(x)^{q-m}$$

est une combinaison linéaire de fonctions de S et par conséquent $h \in S$. D'autre part,

$$(Ff)^{(p)}(u) = F[(-2i\pi x)^p f](u) = (Fh)(u).$$

La fonction h appartient à S, elle est donc de toute évidence absolument continue et intégrable ainsi que toutes ses dérivées $h^{(q)}$. D'après la Proposition 44, on a, pour $q = 0, 1, \ldots$,

$$(2i\pi u)^q (Fh)(u) = (Fh^{(q)})(u),$$

soit

$$(2i\pi u)^q (Ff)^{(p)} = ((Fh)^{(q)})(u),$$

d'où

$$|u^q(Ff)^{(p)}| \leq c \int_{\mathbb{R}} |h^{(q)}(x)|\, dx \leq D_{q,p}.$$

Réciproquement, soit g une fonction de S. D'après ce qui précède, sa transformée de Fourier

$$\tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} g(u) e^{-2i\pi xu}\, du \equiv (Fg)(x)$$

appartient à S. Posons $f(x) = \tilde{f}(-x)$. Il est évident que $f \in S$. D'autre part, puisque $\tilde{f} \in S$, elle est intégrable. On peut donc lui appliquer la formule d'inversion

$$g(u) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) e^{2i\pi ux}\, dx \qquad \text{p.p. } (du).$$

Comme les deux membres de cette égalité sont des fonctions continues, on a donc *pour tout* $u \in \mathbb{R}$

$$g(u) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) e^{2i\pi ux}\, dx$$

Soit en changeant x en $-x$ dans l'intégrale,

$$\begin{aligned} g(u) &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(-x) e^{-2i\pi ux} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi ux} dx \\ &= (Ff)(u). \end{aligned}$$

La fonction g est bien la transformée de Fourier d'une fonction f de S, i.e. $f = F^{-1}g$.■

Remarque 54 1. *Pour $f \in S$, on a donc*

$$F^{-1}(Ff) = F(F^{-1}f) = f.$$

2. *Il est commode de noter $F^{-1} = \bar{F}$, ce qui rappelle le changement de $+i$ en $-i$ dans la formule définissant F^{-1}, mais attention, $F^{-1}f \neq \overline{Ff}$!*

Théorème 10 *Soient f et g deux fonctions de S, alors*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} (Ff)(u)\overline{(Fg)(u)}\, du.$$

Preuve. D'après le théorème 10,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} (Ff)(u) e^{2i\pi ux}\, du,$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} [\int_{\mathbb{R}} (Ff)(u) e^{2i\pi ux}\, du] \overline{g(x)}\, dx.$$

Comme la fonction $(Ff)(u)\overline{g(x)}e^{2i\pi ux}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, on a par Fubini

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)} = \int_{\mathbb{R}} (Ff)(u) [\int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)} e^{2i\pi ux}\, dx]\, du.$$

Or, par linéarité

$$\overline{(Fg)(u)} = \int_{\mathbb{R}} \overline{g(x)} e^{2i\pi ux}\, dx.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} (Ff)(u)\overline{Fg(u)}\, du.■$$

Corollaire 55 (Formule de Parseval-Plancherel). *Soit $f \in S$, alors*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} |(Ff)(u)|^2 \, du.$$

Remarque 56 1. *Le Théorème 10* n'est pas valable *pour des fonctions qui sont seulement intégrables. Dans ce cas, seule la formule de Plancherel 1.6 est vraie.*

2. *En revanche, le Théorème 10 et son corollaire s'étendent aux fonctions dont le carré du module est intégrable*

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 < \infty.$$

La transformée de Fourier Ff est, dans ce cas, une fonction qui est telle que

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |(Ff)(u) - g_N(u)|^2 \, du = 0,$$

où

$$g_N(u) = \int_{[-N,N]} e^{-2i\pi ux} f(x) \, dx.$$

1.7 Epilogue

L'espace $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions intégrables *est insuffisant* pour les besoins de la physique.

En effet, il n'existe pas de fonction intégrable Δ telle que pour *toute fonction* de $L^1(\mathbb{R})$ on ait

$$\Delta \star f = f.$$

En d'autres termes, il *n'existe pas d'unité* pour le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Preuve. Supposons le contraire. On aurait alors, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$(F\Delta)(Ff) = (Ff).$$

Soit en prenant par exemple $f(x) = f_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$,

$$F\Delta = 1,$$

ce qui est *impossible*, par le Théorème de Riemann-Lebesgue 6, si $\Delta \in \mathcal{L}_\lambda(R)$.■

Ce résultat est très gênant pour l'utilisateur du produit de convolution. La théorie des *distributions* résoud ce problème.

1.8 Bibliographie

- Il y a peu d'ouvrages élémentaires qui exposent la mesure et l'intégration au sens de Lebesgue, citons cependant
  - A.J. WEIR, *Lebesgue integration and measure*, Cambridge University Press.
- Ouvrages généraux sur le cours.
  - C. GASQUET, P. WITOMSKI, *Analyse de Fourier et applications,* Masson.
  - H. REINHARD, *Cours de mathématique du signal*, Dunod Université.
- Recueil d'exercices corrigés.
  - F. BAYEN, C. MARGARIA, *Problèmes de mathématiques appliquées*, Ellipses.
- Cours complet avec exercices corrigés.
  - P. BENOIST-GUEUTAL, M. COURBAGE, *Mathématiques pour la physique*, Eyrolles.
  - W. APPEL, *Mathématique pour la physique et les physiciens*, H&K Editions.