# ANALYSE EN S5 IFIPS

4 novembre 2005

# Rappel du programme officiel

1. Analyse de Fourier
   - Compléments d'intégration.
   - Transformation de Fourier au sens des fonctions.
   - Convolution.
2. Fonctions d'une variable complexe
   - Fonctions holomorphes.
   - Théorie de Cauchy.
   - Méthode des résidus.
   - Transformées de Laplace.
3. Introduction aux distributions
   - Espace des fonctions test et des distributions.
   - Distributions régulières et non régulières.
   - Suites et séries de distributions.
   - Opérations élémentaires sur les distributions.
   - Dérivée des distributions.

# Chapitre 1

# Compléments d'intégration

## 1.1 Mesure d'un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$.

Avec la notion de distance entre deux élements d'un même ensemble, un concept tout aussi fondamental est la notion de mesure (longueur, surface, volume, poids) d'un sous-ensemble d'un ensemble (Théorie de la Mesure) ainsi que du calcul de cette mesure (Calcul Intégral).

### 1.1.1 Définition d'une mesure sur $\mathbf{R}^n$

Pour $n = 1$ nous avons la *notion de mesure d'un intervalle borné.* Soient $a$ et $b \in \mathbf{R}$ et $J$ l'un des intervalles suivants :

$$[a, b]\ [a, b[\ ]a, b[\ ]a, b] \quad \text{ou } \emptyset \text{ (Ensemble vide)}$$

On pose : $\lambda(J) = |a - b| \quad$ ou $\lambda(\emptyset) = 0$.

Ainsi définie, la mesure $\lambda$ *ne permet que de mesurer des intervalles bornés ;* on peut en fait *l'étendre* à une famille bien plus grande de sous-ensembles de $\mathbf{R}$. La mesure ainsi définie pour des ensembles plus généraux, s'appelle la *mesure de Lebesgue sur* $\mathbf{R}$.

On montre cependant qu'il y a des ensembles *bornés* dans $\mathbf{R}$ qui ne sont pas mesurables pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

Sans en faire la théorie, nous allons indiquer comment on peut définir les mesures sur $\mathbf{R}^n$ et en donner leurs propriétés élémentaires.

### 1.1.2 Définitions

**Définition 1** *Un* pavé *de* $\mathbf{R}^n$ *est un ensemble de la forme :*

$$J = [x_1, \cdots, x_n] \quad \textit{où } x_i \in J_i$$

*l'ensemble $J_i$ étant soit l'ensemble vide ($\emptyset$), soit* un intervalle borné *de* $\mathbf{R}$ *de la forme :*

$$[a_i, b_i]\ [a_i, b_i[\ ]a_i, b_i[\ ]a_i, b_i] \quad i = 1 \cdots n$$

$$a_i, b_i \ \in \mathbf{R} \quad \text{et } a_i \leq b_i.$$

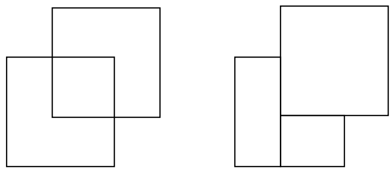
On note : $J = J_1 \times \cdots \times J_n$ (produit cartésien).

**Définition 2** *Soit* $\mathbf{J}$ l'ensemble de tous les pavés de $\mathbf{R}^n$*. Une* figure *est un ensemble de* $\mathbf{R}^n$ *constitué d'une union* finie *de pavés de* $\mathbf{J}$*.*

L'ensemble de toutes les figures est noté $\mathcal{J}$.

**Proposition 3** *Si $M$ est une figure ($M \in \mathcal{J}$), alors $M$ est une union disjointe de pavés de* $\mathbf{J}$,

$$M = \cup_{i=1}^{m<\infty} J^i \quad \text{où} \quad J^i \cap J^k = \emptyset \quad \text{si} \quad i \neq k.$$



M M=$J_1 \cup J_2 \cup J_3$

**Définition 4** *Une application $\varrho : \mathbf{J} \to \mathbf{R}$ qui à chaque pavé assigne un nombre réel, s'appelle* fonction d'intervalle *si elle possède les propriétés suivantes :*

1. *Elle est* monotone *:*

$$J \text{ et } K \in \mathbf{J} \quad \text{et} \quad J \subset K \quad \Rightarrow \quad \varrho(J) \leq \varrho(K).$$

2. *Elle est* additive :

$$J \text{ et } K \in \mathbf{J} \text{ et } J \cap K = \emptyset \Rightarrow \quad \varrho(J \cup K) = \varrho(J) + \varrho(K).$$

**Proposition 5** *On peut étendre $\varrho$ à des ensembles qui sont des unions* finies *de pavés ($\mathcal{J}$) par la formule*

$$\varrho(M) = \sum_{i=1}^{m} \varrho(J^i),$$

*où $M = \cup_{i=1}^{m} J^i$ avec $J^i \cap J^k = \emptyset$ si $i \neq k$.*

La fonction $\varrho$ est donc définie sur les figures ($\mathcal{J}$).

**Exercice 6** *Démontrer que cette extension de $\varrho$ ainsi définie est indépendante de la représentation de $M$ sous forme d'union disjointe de pavés.*

**Exercice 7** *Démontrer que les axiomes* 1. *et* 2. *impliquent que pour $M \in \mathcal{J}$ on a :*

$$\varrho(M) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \varrho(\emptyset) = 0.$$

Pour le moment on ne sait donc mesurer avec $\varrho$ que des ensembles de $\mathbf{R}^n$ qui sont des unions *finies* de pavés ( éléments de la famille des figures $\mathcal{J}$). Pour pouvoir faire mieux et mesurer certains ensembles, *mais pas tous*, qui sont des unions *infinies* de pavés il est nécessaire de supposer que la fonction d'intervalle $\varrho$ satisfait à une condition supplémentaire (condition de régularité).

**Définition 8** *Une* mesure *sur $\mathbf{R}^n$ est une fonction d'intervalle qui outre les axiomes* 1. *et* 2. *satisfait à la condition suivante :*

3. *Pour tout pavé $J \in \mathbf{J}$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un pavé de la forme*

$$O = O_1 \times O_2 \times \cdots \times O_n,$$

*où les $O_i$ sont des intervalles* bornés et ouverts *de* $\mathbf{R}$, *tels que*
- $J \subset O$.
- $\varrho(O) \leq \varrho(J) + \epsilon$.

### 1.1.3 Exemples de mesures

**Exemple 9** *La mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^n$ (ou volume) que l'on note $\lambda$ est définie à partir de :*

$$\lambda(J) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i),$$

*pour tout pavé $J$ de la forme*

$$J = \{x \in \mathbf{R}^n : \quad a_i \leq x_i \leq b_i \quad a_i \leq x_i < b_i \quad a_i < x_i \leq b_i \quad a_i < x_i < b_i\}.$$

**Exemple 10** *Soit $f$ une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui est* continue à droite *;*

$$\lim_{h \to 0_+} f(x+h) = f(x)$$

*et* non décroissante

$$f(x) \geq f(y) \quad si \quad x \geq y.$$

*On définit (Stieltjes) la mesure $\varrho_f$ à partir de :*

$$\varrho_f(J) = \begin{cases} f(b) - f(a), & pour\ J = ]a,b]; \\ f(b) - f(a-), & pour\ J = [a,b]; \\ f(b-) - f(a), & pour\ J = ]a,b[; \\ f(b-) - f(a-), & pour\ J = [a,b[. \end{cases}$$

Ici $f(x-) = \lim_{h \to 0} f(x-h)$, qui n'a aucune raison d'être égal à $f(x)$.

**Exemple 11** *Soit $H(x)$ la fonction de Heaviside :*

$$\begin{cases} H(x) = 0, & pour\ x < 0; \\ H(x) = 1, & pour\ x \geq 0. \end{cases}$$

*Elle définit une mesure $\varrho_H$ sur $\mathbf{R}$ appelée* mesure de Dirac.

Physiquement, la mesure d'un intervalle $I$ de la droite $\mathbf{R}$ pour cette mesure n'est autre que la charge portée par $I$ sachant qu'il n'y a qu'une charge égale à un, située à l'origine.

**Exemple 12** *Soit $\varphi$ la fonction définie pour $k$ entier par :*

$$\varphi(x) = k + 1 \quad pour \quad k \leq x < k + 1$$

*Alors, la mesure qu'on a ainsi définie est la mesure* "Peigne de Dirac"*.*

Physiquement, la mesure d'un intervalle $I$ est ici le nombre de charges unitées situées au points $x = k$ et contenues dans l'intervalle $I$.

**Exemple 13** *Si $F \geq 0$ et $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$, la mesure $\varrho_F$ ainsi définie sur $\mathbf{R}$ est une* mesure de probabilité *sur $\mathbf{R}$, de* fonction de répartition *$F$.*

En pratique on prend aussi $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

**Exemple 14** *Si $\varrho_1$ est une mesure sur $\mathbf{R}^p$ et $\varrho_2$ une mesure sur $\mathbf{R}^q$, alors on peut définir une mesure sur $\mathbf{R}^{p+q}$ par*

$$\varrho(J^1 \times J^2) = \varrho_1(J^1).\varrho_2(J^2),$$

*pour $J^1 \in \mathbf{J}(\mathbf{R}^p)$ et $J^2 \in \mathbf{J}(\mathbf{R}^q)$.*

**Remarque 15** *En général, nous l'avons déjà dit, pour une mesure $\varrho$ sur $\mathbf{R}^n$, tous les sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$ ne sont pas mesurables*[1]*.*

Parmi ceux qui le sont, il y en a de deux sortes
- Ceux dont la mesure est finie : $\varrho(A) < \infty$.
- Ceux dont on peut considérer qu'ils ont une mesure infinie, $\varrho(A) = +\infty$.

**Définition 16** *Les ensembles du premier type seront, par la suite, appelés* intégrables.

[1] Celà dépend en fait des axiomes de départ des mathématiques que l'on prend !

### 1.1.4 Ensembles de mesure nulle

**Définition 17** *Un ensemble $N \subset \mathbf{R}^n$ est un* ensemble de $\mu$-mesure nulle*, si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite de pavés $[J^k]_1^\infty$ de $\mathbf{J}$ telle que $N \subset \cup_{k=1}^\infty J^k$ et $\sum_{k=1}^\infty \mu(J^k) < \epsilon$.*

**Exercice 18** *Un point de $\mathbf{R}^n$ est-il de mesure de Lebesgue nulle ? De mesure de Dirac nulle ? L'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, est-il de mesure de Lebesgue nulle ?*

**Exercice 19** *Soit l'ensemble $\mathbf{K}$ de Cantor, construit de la façon suivante : Prendre l'intervalle $[0, 1]$, enlever de cet intervalle le tiers du milieu, puis les tiers du milieu des intervalles restants, puis les tiers du milieu des intervalles restants, et ainsi de suite... L'ensemble $\mathbf{K}$ des points de l'intervalle $[0, 1]$ qui restent à la limite de ce processus est de mesure de Lebesgue nulle. On ne peut cependant pas dénombrer les points de l'ensemble $\mathbf{K}$.*


**Définition 20** *On dit qu'une propriété est* vraie presque partout *(en abrégé p.p/$\mu$) si elle est vraie en dehors d'un ensemble de mesure nulle, pour une mesure donnée $\mu$.*

**Exemple 21** *La fonction sur $\mathbf{R}$ : $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction définie presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda$ sur $\mathbf{R}$.*

**Exemple 22** *La fonction précédente est continue partout sur $\mathbf{R}$ sauf au point $x = 0$, donc continue p.p/$\lambda$.*

Il *n'existe pas* de fonction $g$ continue sur $\mathbf{R}$ qui soit égale presque partout à la fonction précédente.

**Exemple 23** *Soit la suite $f_n$ de fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par ($n$ entier $\geq 0$)*

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & \textit{pour } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \textit{ailleurs.} \end{cases}$$

*On peut dire que :* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad$ *p.p./$\lambda$, puisque ;*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \textit{pour } 0 \leq x < 1; \\ 1 & \textit{pour } x = 1. \end{cases}$$

Fin du cours $n^0 1$

## 1.2 Intégrale de Lebesgue pour une mesure sur $\mathbf{R}^n$

Le but de la théorie qui va suivre (Intégrale de Lebesgue), est d'étendre la notion d'intégrale à une classe de fonctions bien plus grande que celle pour lequelle l'intégrale de Riemann est définie, c'est-à-dire, les fonctions continues sur un intervalle fermé borné, et nulles en dehors.

**Remarque 24** *Du point de vue du* calcul *de la valeur des intégrales déjà connues, cela ne changera rien à ce qui est, si la fonction à intégrer est continue.*

Du point de vue du calcul *numérique* sur ordinateur, celà non plus ne changera pas grand chose, puisque les seules fonctions que l'on traite dans ce cas sont en fait des combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices d'intervalles aux extrémités décimales finies.

Par contre pour les calculs analytiques (limites sous le signe somme, changement des ordres d'intégrations dans les intégrales multiples, etc...), l'intégrale de Lebesgue est un outil incomparable à toutes les autres intégrales par sa *puissance* et sa *simplicité*. Son utilisation se révèle aussi être indispensable au calcul des probabilités.

### 1.2.1 Intégrale des fonctions en escalier

**Exemple 25** *Soit $A$ un ensemble de $\mathbf{R}^n$, on appelle* fonction indicatrice *(on dit aussi, fonction caractéristique) de l'ensemble $A$, la fonction $\chi_A$ définie par*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in A; \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

**Définition 26** *Une* fonction en escalier *est une combinaison linéaire d'un nombre* fini *d'indicatrices de pavés, de la forme*

$$\phi = c_1\chi_{J_1} + c_2\chi_{J_2} + \cdots + c_r\chi_{J_r},$$

*où, pour $i = 1, \ldots, r$, $c_i \in \mathbf{R}$ et $J_i \in \mathbf{J}$, l'ensemble des pavés de $\mathbf{R}^n$.*

**Définition 27** L'intégrale *de la fonction $\phi$ par rapport à la mesure $\mu$ est par définition le nombre réel*

$$\int_{\mathbf{R}^n} \phi \, d\mu = c_1\mu(J_1) + \cdots + c_r\mu(J_r).$$

En raison des propriétés de décomposition de l'ensemble des figures (Proposition 3), l'expression précédente est bien indépendante des différentes écritures possibles de $\phi$ en fonctions indicatrices de pavés.

### 1.2.2 L'ensemble $\mathcal{L}_\mu(\mathbf{R}^n)$ des fonctions intégrables

Il s'agit de définir, pour une mesure $\mu$ donnée sur $\mathbf{R}^n$, l'ensemble des fonctions qui sont intégrables au sens de Lebesgue. Une telle fonction est dans tous les cas, quel que soit la mesure, une limite de suites de fonctions en escalier.

**Théorème 1** (Théorème de construction). *Soit $(\phi_m)_{m=1,2,\ldots}$ une suite de fonctions en escalier telle que*

1. *$\phi_{m+1}(x) \geq \phi_m(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ ; la suite $\phi_m$ est donc une suite non décroissante.*
2. *La suite de nombres réels $\alpha_m = \int_{\mathbf{R}^n} \phi_m \, d\mu$ converge, $\lim_{m\to\infty} \alpha_m = \alpha$.*

*Alors*

1. $\lim_{m\to\infty} \phi_m(x)$ existe*(est un nombre fini) pour tout $x$ en dehors d'un ensemble de $\mathbf{R}^n$ de $\mu$-mesure nulle. C'est à dire que la limite existe p.p./$\mu$.*
2. *Soit $(\psi_m)_{m=1,2,\ldots}$ une autre suite de fonctions en escalier telle que*

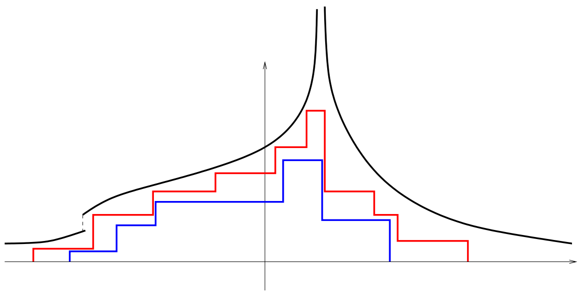
$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \psi_m(x) \quad (p.p./\mu).$$

*Alors*

$$\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} \phi_m \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} \psi_m \, d\mu.$$

*Autrement dit, cette limite ne dépend que de $f$ et non du choix de suite de fonctions en escaliers qui l'approxime.*

**Preuve.** Nous ne démontrons pas ce théorème (voir la bibliographie). Il est cependant intéressant de savoir que sa démonstration repose essentiellement sur le fait qu'une suite croissante de nombres réels qui est bornée est une suite convergente.■



**Définition 28** *1. Soit $f$ une fonction positive sur $\mathbf{R}^n$. On dit que $f$ est* intégrable *pour la mesure $\mu$ si $f$ est la limite $\mu$-presque partout d'une suite non décroissante de fonctions en escalier $(\phi_m)_{m=1,2,\ldots}$ telle que $\int_{\mathbf{R}^n} \phi_m \, d\mu$ reste bornée. Dans ce cas, on appelle* intégrale de *$f$ la limite*

$$\int_{\mathbf{R}^n} f \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} \phi_m \, d\mu.$$

*2. Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. On dit que $f$ est* intégrable *pour la mesure $\mu$ si les fonctions $f_+ = \max\{f, 0\}$ et $f_- = \max\{-f, 0\}$ sont intégrables, et on pose*

$$\int_{\mathbf{R}^n} f \, d\mu = \int_{\mathbf{R}^n} f_+ \, d\mu - \int_{\mathbf{R}^n} f_- \, d\mu.$$

*3. Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$. On dit que $f$ est* intégrable *pour la mesure $\mu$ si les fonctions $\Re e(f)$ et $\Im m(f)$ sont intégrables, et on pose*

$$\int_{\mathbf{R}^n} f \, d\mu = \int_{\mathbf{R}^n} \Re e(f) \, d\mu + i \int_{\mathbf{R}^n} \Im m(f) \, d\mu.$$

*4. On note $\mathcal{L}_\mu(R^n)$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes sur $\mathbf{R}^n$ qui sont intégrables pour $\mu$.*

**Remarque 29** *Par définition, $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ est intégrable si et seulement si son module $|f|$ est intégrable.*

En retour, on peut définir la mesure pour des sous-ensembles très généraux de $\mathbf{R}^n$.

**Proposition 30** *Un ensemble $A \subset R^n$ est* intégrable *pour une mesure $\mu$, si sa fonction indicatrice $\chi_A$ est intégrable au sens de Lebesgue pour cette mesure $\mu$. On définit sa mesure par*

$$\mu(A) = \int_{\mathbf{R}^n} \chi_A \, d\mu.$$

**Proposition 31** *Soit $A \subset \mathbf{R}^n$, un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$ qui est tel que*

*1. $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$ où les $J_i$ sont des pavés de $\mathbf{R}^n$, (donc des ensembles de mesure $\mu(J_i) < \infty$) deux à deux disjoints ($J_i \cap J_k = \emptyset$ pour $i \neq j$).*

*2. $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(J_i) < \infty$. Alors $A$ est intégrable, et*

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(J_i) < \infty.$$

**Preuve.** Soit $\chi_i$ la fonction indicatrice du pavé $J_i$ et $\Phi_m$ la fonction définie sur $\mathbf{R}^n$ par

$$\Phi_m(x) = \sum_{i=1}^{m} \chi_i(x).$$

On a $\int_{\mathbf{R}^n} \Phi_m \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \mu(J_i)$ et $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} \Phi_m \, d\mu < \infty$ par l'hypothèse 2. Comme d'autre part $\Phi_{m+1}(x) \geq \Phi_m(x)$, d'une manière évidente, on applique le théorème de construction, qui dit que

– $\lim_{m\to\infty} \Phi_m(x)$ existe pour presque tout les $x$ et vaut par conséquent $\chi_A(x)$ p.p./$\mu$.
– $\lim_{m\to\infty} \int_{\mathbf{R}^n} \Phi_m \, d\mu = \int_{\mathbf{R}^n} (lim_{m\to\infty}\Phi_m) \, d\mu$.

Donc
$$\int_{\mathbf{R}^n} \chi_A \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(J_i).$$
Autrement dit, l'ensemble $A$ est intégrable et sa mesure est la somme de la série $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(J_i)$.■

**Remarque 32** *Cette propriété nous dit que toute union* $A = \cup_{i=1}^{\infty} J_i$ *de pavés disjoints tels que la somme de leurs mesures soit finie est un ensemble intégrable (de mesure* $\mu(A) < \infty$*). Le résultat est encore vrai lorsque l'on substitue à* $J_i$ *(pavé) un ensemble intégrable* $A_i$*,* $(\mu(A_i) < \infty)$ *quelconque.*

On vérifie maintenant que les fonctions continues sur les intervalles fermés et bornés de $\mathbf{R}$, prolongée par 0 a l'extérieur, sont intégrables.

**Proposition 33** *Soit* $\mu = \lambda$ *la mesure de Lebesgue sur la droite* $\mathbf{R}$*. Soit* $f$ *une fonction définie sur* $\mathbf{R}$*, à valeur dans* $\mathbf{R}$*, et nulle à l'extérieur d'un intervalle borné* $[a, b]$*. Si* $f$ *est continue sur* $[a, b]$*, alors*

1. *La fonction* $f$ *est intégrable au sens de Lebesgue.*
2. $\int_{\mathbf{R}} f \, d\lambda = \int_a^b f(x) \, dx$ *(intégrale de Riemann).*

**Preuve.** Il suffit d'écrire les sommes de Riemann correspondant à la fonction $f$.■

À ce propos, on peut se demander quelles sont les fonctions pour lesquelles les sommes de Riemann sont toujours convergentes vers un nombre fini (définition de l'intégrabilité au sens de Riemann). Lebesgue a caractérisé ces fonctions.

**Proposition 34** *Soit* $\mu = \lambda$ *la mesure de Lebesgue sur* $\mathbf{R}^n$*. Soit* $S_N(f)$ *une* somme de Riemann *de la fonction* $f$ *:*
$$S_N(f) = \sum_{i=1}^{N} f(\vec{x}_i)\lambda(J_i),$$
*où* $[J_i]_{i=1}^N$ *est une famille finie quelconque de pavés disjoints et* $\vec{x}_i \in J_i$*. Alors*
$$\lim_{N\to\infty} (\sum_{i=1}^{N} f(\vec{x}_i)\lambda(J_i)) = (Rie) \int_{J_0} f(\vec{x}) \, d^n x < \infty$$
si et seulement si

– *$f$ est une fonction bornée sur* $\mathbf{R}^n$*.*
– *$f$ est nulle à l'extérieur de la figure bornée* $J_0 = \bigcup_{i=1}^{N} J_i$ *de* $\mathbf{R}^n$*.*
– *L'ensemble des points où $f$ est discontinue est un ensemble de mesure de Lebesgue $\lambda$ nulle.*

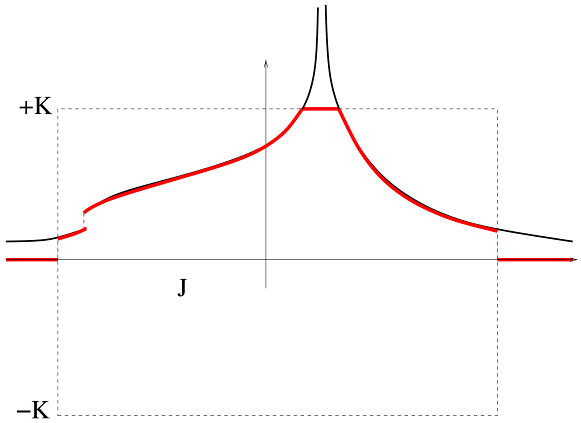
*Dans ces conditions,* l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Riemann de la fonction $f$ existent et sont égales *:*
$$\int_{\mathbf{R}^n} f \, d\mu = (Rie) \int_{J_0} f(\vec{x}) \, d^n x.$$

### 1.2.3 Propriétés essentielles des fonctions intégrables de Lebesgue

#### A- Fonctions et ensembles [mesurables]

Un certain nombre de propriétés des fonctions de $\mathcal{L}_\mu(\mathbf{R}_n)$ n'ont de sens que si l'on considère cet ensemble comme faisant partie d'un ensemble encore *plus grand* que $\mathcal{L}_\mu(\mathbf{R}^n)$.

**Définition 35** *Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. On appelle* troncature *de $f$ sur le pavé $J$, par la constante positive $K$, la fonction $T_J^K(f)$ définie par la représentation graphique suivante (trait plein).*




**Définition 36** 1. *Une fonction $f : R^n \to \mathbf{R}$ est [mesurable] si toutes ses troncatures $T_J^K(f)$ sont intégrables au sens de Lebesgue (pour une mesure $\mu$ donnée).*

2. *Une fonction $f : R^n \to \mathbf{C}$ est [mesurable] si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont (pour une mesure $\mu$ donnée).*

3. *Un ensemble $A \subset R^n$ est [mesurable] si sa fonction indicatrice $\chi_A$ est [mesurable] (pour une mesure $\mu$ donnée).*

**Remarque 37** 1. *Lorsqu'un ensemble est [mesurable] mais* non intégrable *on pose*

$$\mu(A) = +\infty.$$

2. *On démontre que pour la mesure de Lebesgue $\lambda$, il y a des ensembles de $\mathbf{R}$ qui* ne sont pas mesurables. *En fait, leur existence dépend des axiomes fondamentaux que l'on prend pour les mathématiques, et au niveau élémentaire on n'en rencontre jamais. Donc, dans la pratique, pour la mesure de Lebesgue (longueurs, surfaces, volumes...), tous les ensembles et toutes les fonctions que l'on rencontre sont [mesurables][2]. C'est seulement en théorie des probabilités, en théorie des processus, qu'il peut en être autrement.*

### B- Propriétés des fonctions [mesurables] pour une mesure $\mu$ donnée sur $\mathbf{R}^n$

**Proposition 38** 1. **Notations.** *Pour $f \in \mathcal{L}_\mu(R^n)$ :*

$$\int_{\mathbf{R}^n} f \, d\mu = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \, d\mu(x).$$

*Si $\mu = \lambda$ est la mesure de Lebesgue, on note*

$$\int_{\mathbf{R}^n} f \, d\lambda = \int_{\mathbf{R}^n} f(\vec{x}) \, d^n x.$$

2. *Soient $f_1$, $f_2 \in \mathcal{L}_\mu(R^n)$ telles que $f_1(x) = f_2(x)$ p.p./$\mu$, alors*

$$\int_{R^n} f_1 \, d\mu = \int_{R^n} f_2 \, d\mu$$

3. *L'ensemble $\mathcal{L}_\mu(R^n)$ est un espace vectoriel complexe. Pour $c_1$, $c_2 \in \mathbf{C}$,*

$$\int_{R^n} (c_1 f_1 + c_2 f_2) \, d\mu = c_1 \int_{R^n} f_1 \, d\mu + c_2 \int_{R^n} f_2 \, d\mu$$

[2] Le qualificatif [mesurable] sera donc écrit dans ce texte entre crochets : [...]

4. *Soit $f \in \mathcal{L}_\mu(R^n)$ et $f \geq 0$ p.p./$\mu$. Alors*

$$\int_{R^n} f \, d\mu \geq 0.$$

5. *Soit $f \in \mathcal{L}_\mu(R^n)$* alors *$|f| \in \mathcal{L}_\mu(R^n)$, de plus*

$$|\int_{R^n} f \, d\mu| \leq \int_{R^n} |f| \, d\mu.$$

6. *Soient $f$ une fonction [mesurable] à valeurs complexes et $g \in \mathcal{L}_\mu(R^n)$ telle que $|f| \leq g$. Alors $f \in \mathcal{L}_\mu(R^n)$ et de plus*

$$|\int_{R^n} f \, d\mu| \leq \int_{R^n} |g| \, d\mu.$$

7. Conséquence importante *de 4. et 5. Soit $f$ une fonction [mesurable] à valeurs complexes, alors $f$ est intégrable au sens de Lebesgue* si et seulement si *$|f|$ l'est, on a de plus*

$$|\int_{R^n} f d\mu| \leq \int_{R^n} |f| d\mu.$$

8. *Si $f \geq 0$ est [mesurable] mais* non intégrable *on note par définition*

$$\int_{R^n} \pm f \, d\mu = \infty.$$

   *On dira parfois dans ce cas, comme dans le cas où $f$ est intégrable, que* l'intégrale existe.

### C- Intégrale sur un ensemble [mesurable] $M$ de $\mathbf{R}^n$

**Définition 39** *Soient $\mu$ une mesure sur $\mathbf{R}^n$ et $M$ un sous ensemble de $\mathbf{R}^n$ [mesurable] par rapport à la mesure $\mu$. Une fonction $f : M \to \mathbf{C}$ est [mesurable] ou* intégrable sur *$M$ par rapport à $\mu$ si la fonction*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & si\ x \in M; \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

*est [mesurable] ou intégrable par rapport à $\mu$ sur $\mathbf{R}^n$. On écrira alors*

$$\int_M f d\mu = \int_{R^n} \tilde{f} d\mu,$$

*si la fonction $\tilde{f}$ est intégrable sur $\mathbf{R}^n$.*

**Proposition 40** 1. *Si $f \in \mathcal{L}_\mu(R^n)$, la restriction de $f$ à $M$ est intégrable (même chose pour [mesurable]).*

2. Toutes les propriétés du point B) restent vraies lorsque l'on substitue $M$ à $\mathbf{R}^n$.

**Définition 41** *On note $\mathcal{L}_\mu(M)$ l'ensemble des fonctions définies sur l'ensemble [mesurable] $M$ qui sont intégrables par rapport à $\mu$.*

**Remarque 42** *Dans la partie du cours portant sur les distributions, il sera nécessaire de ne pas distinguer entre elles deux fonctions de $\mathcal{L}_\mu(M)$ qui sont égales p.p./$\mu$. La fonction $f \in \mathcal{L}_\mu(M)$ et la fonction $f + f_0 \in \mathcal{L}_\mu(M)$ (où $f_0(x) = 0$ p.p./$\mu$), définissent le* même élément *$\dot{f}$ d'un espace noté $L^1_\mu(M)$.*

### 1.2.4 Théorèmes de convergence

**A- Théorème de convergence monotone de Beppo Levi.**

**Théorème 2** *Soit $f_k : M \to \mathbf{R}$ une suite ($k = 1, 2, ...$) de fonctions de $\mathcal{L}_\mu(M)$ telles que*

1. $f_{k+1}(x) \geq f_k(x)$.
2. $\int_M f_k d\mu < K$, *où $K$ est une constante* indépendante *de $k$.*

*Alors, il existe une fonction intégrable $f \in \mathcal{L}_\mu(M)$ telle que*

1. $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \quad p.p./\mu$
2. $\displaystyle \lim_{k\to\infty} \int_M f_k \, d\mu = \int_M (\lim_{k\to\infty} f_k) \, d\mu = \int_M f \, d\mu \leq K.$

**Remarque 43** 1. *Ce théorème implique que l'on ne peut plus agrandir $\mathcal{L}_\mu(M)$ par un procédé analogue à celui qui fut utilisé dans le théorème de construction.*

2. *Ce théorème et la Proposition 33 permettent de démontrer l'intégrabilité au sens de Lebesgue d'un certain nombre de fonctions. Par exemple, $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$.*

**Corollaire 44** 1. $\int_M |f| \, d\mu < \infty \quad \Rightarrow \quad |f(x)| < \infty \quad p.p./\mu.$

2. $\int_M |f| \, d\mu = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = 0 \quad p.p./\mu.$

**B- Théorème de convergence dominée de Lebesgue.**

**Théorème 3** *Soit $f_k : M \to \mathbf{C}$ une suite ($k = 1, 2, ...$) de fonctions de $\mathcal{L}_\mu(M)$ telle que*

- $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \quad p.p./\mu$ *si $x \in M$.*
- $|f_k| \leq g$ *pour tous les $k$, où la fonction $g$ est une fonction* indépendante *de $k$ et* intégrable au sens de Lebesgue *sur $M$.*

*Alors $f \in \mathcal{L}_\mu(M)$ et*

$$\lim_{k\to\infty} \int_M f_k \, d\mu = \int_M (\lim_{k\to\infty} f_k) \, d\mu = \int_M f \, d\mu.$$

Fin du cours $n^0 2$

**Corollaire 45** (Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre). *Soit $f(x, s)$ une fonction à valeurs réelle ou complexe, définie pour $x \in M$ et pour $s \in ]s_0, s_1[ \subset \mathbf{R}$. On suppose que pour tout $s$ fixé dans $]s_0, s_1[$, la fonction $f$ est intégrable par rapport à $\mu$ sur $M$. On pose*

$$F(s) = \int_M f(x, s)\mu(dx) \quad s \in ]s_0, s_1[.$$

*On suppose que*

- *$f(x, s)$ est continue en $s$* pour tout *$s$ dans $]s_0, s_1[$, et celà pour presque tout ($/\mu$) $x \in M$ ;*
- *on peut trouver une fonction $g(x)$* indépendante *de $s$ qui soit* intégrable au sens de Lebesgue *sur $M$, telle que $|f(x, s)| \leq g(x)$.*

*Alors, $F(s)$ est continue en $s$ pour $s \in ]s_0, s_1[$ et*

$$\lim_{s\to u} \int_M f(x, s)\mu(dx) = \int_M f(x, u)\mu(dx)$$

$$\lim_{s\to u} F(s) = F(u).$$

**Corollaire 46** (Dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre). *Soit $f(x,s)$ une fonction à valeurs réelle où complexe, définie pour $x \in M$ et pour $s \in ]s_0, s_1[\subset \mathbf{R}$. On suppose que pour tout $s$ fixé dans $]s_0, s_1[$, la fonction $f$ est intégrable par rapport à $\mu$ sur $M$. On pose*

$$F(s) = \int_M f(x,s)\mu(dx) \quad s \in ]s_0, s_1[.$$

*On suppose que*
- *$f(x,s)$ est dérivable en $s$* pour tout *$s$ dans $]s_0, s_1[$, et celà pour presque tout $(/\mu)$ $x \in M$ ;*
- *on peut trouver une fonction $h(x)$* indépendante *de $s$ qui soit* intégrable au sens de Lebesgue *sur $M$, telle que $|\frac{\partial}{\partial s} f(x,s)| \leq h(x)$.*

*Alors, $F(s)$ est dérivable en $s$ pour $s \in ]s_0, s_1[$ et*

$$\frac{dF(s)}{ds} = \int_M \frac{\partial}{\partial s} f(x,s)\mu(dx).$$

**Remarque 47** *On peut dans le corollaire 2, substituer ($z \in D \subset \mathbf{C}$, $D$ ensemble ouvert du plan complexe) à ($s \in ]s_0, s_1[\subset \mathbf{R}$). Dans ces conditions $F(z)$ est une fonction holomorphe dans $D$.*

**Remarque 48** *Nous insistons sur le fait que la mesure est une mesure quelconque ; dans le cas de la mesure "Peigne de Dirac", par exemple, les théorèmes énoncés s'écrivent avec la substitution*

$$\int_M \to \sum_{i=-\infty}^{+\infty} .$$

**Exercice 49** *Écrire les deux corollaires précédents dans le cas de la mesure "Peigne de Dirac".*

**C- Propriétés d'additivité de l'intégrale de Lebesgue.**

**Théorème 4** (Additivité dénombrable). *Soit $f \in \mathcal{L}_\mu(M)$ et $M_k$ une suite* dénombrable *de sous ensembles [mesurables], deux à deux disjoints de $\mathbf{R}^n$ tels que $M = \cup_k M_k$. Alors*
- *La fonction $f$, restreinte à $M_k$, est intégrable par rapport à $\mu$ sur $M_k$.*
- *On a la propriété* d'additivité dénombrable *:*

$$\int_M f d\mu = \sum_k \int_{M_k} f, \mu.$$

### 1.2.5 Lien entre intégrale de Lebesgue et intégrale de Riemann

Nous nous limitons au cas où la mesure considérée est la mesure des longueurs $\lambda$ sur $\mathbf{R}$. Lorsque l'on se propose d'évaluer $\int_{]a,b[} f(x)\, dx$, diverses situations peuvent se présenter.

1. La fonction $f$ est intégrable au *sens propre de Riemann* (voir la Proposition 33).
2. La fonction $f$ n'est pas intégrable au sens propre de Riemann, mais l'intégrale généralisée $\int_{\to a}^{\to b} f(x)\, dx$ est convergente[3]. Cela *ne préjuge en rien* de l'intégrabilité de $f$ au sens de Lebesgue.

**Exemple 50** *Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $x \mapsto f(x) = \frac{\sin x}{x}$.*

Alors l'intégrale généralisée

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

[3] *réviser à ce sujet son cours de l'année précédente !*

est convergente mais non absolument convergente. Par conséquent (Propriété 6 dans la Proposition 38), $f$ *n'est pas intégrable* au sens de Lebesgue sur $\mathbf{R}^+$.

Pour montrer que l'intégrale $\int_0^{\to\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ n'est pas absolument convergente, on minore les intégrales partielles

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \\ &\geq \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{k\pi}. \end{aligned}$$

On en déduit donc par additivité et monotonie (Théorème 4)

$$\int_{[0,\infty[} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \int_{[0,k\pi[} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}\right),$$

qui ne peut rester borné lorsque $k \to \infty$.

On a cependant les deux propriétés suivantes, très utiles dans la pratique.

**Proposition 51** (Lebesgue=Riemann généralisé pour les fonctions positives). *Soit* $]a, b[$ *un intervalle de* $\mathbf{R}$ *(éventuellement* $a = -\infty$ *ou* $b = +\infty$*). Soit* $f : ]a, b[ \to \mathbf{C}$ *une fonction continue.*

- *Si* $\int_{\to a}^{\to b} |f(x)|\, dx$ *converge, alors* $f$ *est intégrable sur* $]a, b[$ *et*

$$\int_{]a,b[} f(x)\, dx = \int_{\to a}^{\to b} f(x)\, dx.$$

- *Si* $f(x) \geq 0$ *et si* $\int_{\to a}^{\to b} f(x)\, dx$ *diverge, alors* $f$ *n'est pas intégrable sur* $(a, b)$.

Cette propriété, que l'on démontre facilement, permet de dire immédiatement que les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont intégrables au sens de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ (resp. sur $]0, 1]$, resp. sur $[0, +\infty[$).

Il existe des fonctions dont l'intégrale de Riemann généralisée n'existe pas mais qui sont intégrables au sens de Lebesgue.

**Exemple 52** *Soit* $\xi$ *la fonction définie sur* $[0, 1]$ *par*

$$\xi = \begin{cases} 1, & \textit{si } x \textit{ irrationnel;} \\ 0, & \textit{si } x \textit{ rationnel.} \end{cases}$$

*Il est évident que* $\int_{[0,1]} \xi(x)\, dx = 1$. *Cependant, les sommes de Riemann ne convergent pas, étant donné que la fonction possède un nombre de points de discontinuités de mesure non nulle.*

Il est utile d'avoir une idée plus intuitive de l'intégrale de Lebesgue. La propriété suivante peut y aider dans le cas de la mesure des longueurs $\lambda$.

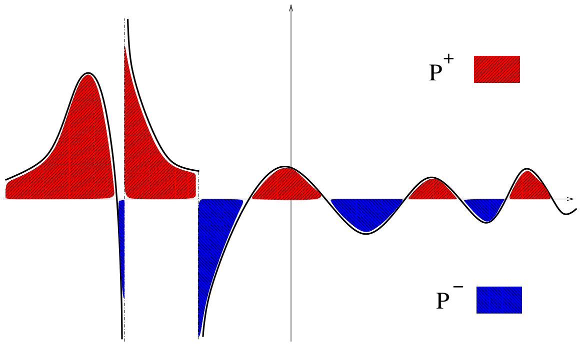
**Proposition 53** *Soit* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$*, une fonction donnée. Dire que* $f$ *est intégrable pour la mesure de Lebesgue revient à dire que si* $f = f^+ + f^-$*, où* $f^+$ *(resp.* $f^-$*) est la partie positive (resp. négative) de* $f$*, alors*

- *L'ensemble* $P^+ = \{(\vec{x}, y) \,|\, 0 \leq y < f^+(\vec{x})\}$*, a une mesure finie pour la mesure de Lebesgue sur* $R^{n+1}$.
- *L'ensemble* $P^- = \{(\vec{x}, y) \,|\, f^-(\vec{x}) < y \leq 0\}$*, a une mesure finie pour la mesure de Lebesgue sur* $R^{n+1}$.

*Si tel est le cas,*

$$\int_{R^n} f(\vec{x})\, d^n x = A^+ - A^-,$$

*où $A^+(A^-)$ sont les mesures de Lebesgue respectives des ensembles $P^+(P^-)$.*




### 1.2.6 Propriétés diverses de l'intégrale de Lebesgue

**A- Intégrales multiples**

Nos fonctions sont toutes supposées [mesurables] pour les mesures considérées. D'autre part, pour simplifier l'écriture, nous ne considérons que le cas de fonctions de deux variables, le cas d'un nombre quelconque de variables ne diffère pas d'une manière essentielle de ce cas.

Soient $\mu_1$ et $\mu_2$ deux mesures sur $\mathbf{R}$ et $\mu$ la mesure produit de ces deux mesures définie sur $\mathbf{R}^2$ (Exemple 14). La possibilité éventuelle de permuter l'ordre des intégrations dans une intégrale double (par rapport à $\mu$) est fournie par le théorème fondamental suivant

**Théorème 5** (Fubini-Tonelli). *Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$. On fait les hypothèses suivantes.*
- *Pour $\mu_1$-presque tout $x \in \mathbf{R}$, la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est $\mu_2$-intégrable sur $\mathbf{R}$.*
- *La fonction $x \mapsto F(x) = \int_{\mathbf{R}} |f(x,y)|\, d\mu_2(y)$ est $\mu_1$-intégrable sur $\mathbf{R}$.*

*Alors $f$ est $\mu$-intégrable sur $\mathbf{R}^2$.*

*Réciproquement, si $f$ est $\mu$-intégrable sur $\mathbf{R}^2$, alors*
- *Pour $\mu_2$-presque tout $y \in \mathbf{R}$, la fonction $x \mapsto f(x,y)$ est $\mu_1$-intégrable sur $\mathbf{R}$.*
- *La fonction $y \mapsto G(y) = \int_{\mathbf{R}} |f(x,y)|\, d\mu_1(x)$ est $\mu_2$-intégrable sur $\mathbf{R}$.*
-
$$\int_{\mathbf{R}^2} f\, d\mu = \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} f(x,y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) = \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} f(x,y)\, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y).$$

Voici une façon moins rigoureuse mais moins lourde de formuler le théorème, dans le cas des fonctions positives.

**Corollaire 54** *Soit $f$ une fonction* positive *de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$.*
- *Si l'une des trois expressions suivantes est finie*

$$I = \int_{\mathbf{R}^2} f\, d\mu, \quad II = \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} f(x,y)\, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x), \quad III = \int_{\mathbf{R}} \left( \int_{\mathbf{R}} f(x,y)\, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y),$$

  *les deux autres sont aussi finies, $f$ est intǵrable sur $\mathbf{R}^2$, et de plus $I = II = III$.*
- *Si l'une de ces trois expressions n'est pas finie, les deux autres ne le sont pas non plus et $f$ n'est pas intégrable sur $\mathbf{R}^2$.*

Fin du cours $n^0 3$

**Remarque 55** *1. Le théorème se généralise trivialement à $\mathbf{R}^n$.*

*2. Le théorème s'applique à toute mesure $\mu$, en particulier aux mesures discrètes (Mesure de décompte, Mesure de Dirac, etc...). Les signes $\int$ deviennent autant de signes $\sum$.*

**B- Changement de variables**

Nous nous limiterons ici au cas d'un changement de variable régulier dans le cas de la mesure des longueurs, surfaces, volumes ...

**Théorème 6** *Soit $\phi$ une application* bijective *de l'ouvert $A$ de l'espace des $(x_1, \cdots x_n)$ dans l'espace des $(y_1, \cdots y_n)$, définie par les $n$ fonctions $\phi_i$ suivantes :*

$$y_i = \phi_i(x_1, \cdots x_n) \qquad i = 1, \cdots n,$$

*où les $\phi_i$ sont* définies, continues, à dérivées partielles du premier ordre continues *sur $A$.*
*Soit $J_\phi(x_1, \cdots x_n)$ le jacobien de l'application $\phi$, i.e. le déterminant*

$$J_\phi(x_1 \cdots x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

*Pour que $f(y_1 \cdots y_n)$ soit intégrable sur l'ensemble $\phi(A)$, il faut et il suffit que la fonction de $\vec{x}$, $f(\phi_1(x_1 \cdots x_n), \cdots, \phi_n(x_1 \cdots x_n))$, multipliée par $|J_\phi(x_1 \cdots x_n)|$, soit intégrable sur $A$. On a alors*

$$\int_{\phi(A)} f(\vec{y})\, dy_1 \cdots dy_n = \int_A f(\phi_1(\vec{x}) \cdots \phi_n(\vec{x}))|J_\phi(\vec{x})|\, dx_1 \cdots dx_n.$$

**C- L'intégrale de Lebesgue comme fonction de sa borne supérieure**

Nous nous limiterons au cas de la mesure des longueurs $\lambda$.

**Théorème 7** *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction intégrable au sens de Lebesgue sur $[a, b]$ (où $b > a$). Soit $F(y) = \int_{[a,y]} f(x)dx$ ; alors, (avec éventuellement le cas $a = -\infty$ et $b = +\infty$).*
*1- $F(y)$ est une fonction* continue *sur $]a, b[$.*
*2- $F'(y) = f(y)$* presque partout *sur $]a, b[$.*

**Remarque 56** *Il existe des fonctions continues, dérivables p.p. pour la mesure de Lebesgue, mais telles que*

$$f(x) \neq \int_{[a,x]} f'(x)\, dx + f(a).$$

L'exemple standard est l'escalier de Cantor.

**Définition 57** *Une fonction $F : J \to \mathbf{C} \quad (J \subset \mathbf{R})$, est dite* absolument continue *sur son intervalle de définition $J$, s'il existe une fonction intégrable $f$ sur tout intervalle borné de $J$ telle que pour $x,\ a \in J$,*

$$F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} f(t)\, dt.$$

**Remarque 58** *1. Une fonction dérivable n'est pas toujours absolument continue. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin x^{-2}, & si\ x \neq 0; \\ 0, & si\ x = 0, \end{cases}$$

*a une dérivée qui n'est pas intégrable.*

2. *D'après le théorème 7, une fonction absolument continue $F$ est dérivable presque partout, et sa dérivée est presque partout égale à $f$. D'une manière lapidaire,* une fonction absolument continue est une fonction qui est "égale à l'intégrale de sa dérivée".

**Théorème 8** *Soient $F$ et $G$ deux fonctions absolument continues définies sur l'intervalle $J$, de dérivées respectives $f$ et $g$. Pour $[a,b] \subset J$, on a*

$$\int_{[a,b]} F(x)g(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_{[a,b]} f(x)G(x)\,dx.$$

**Preuve.** Une application du théorème de Fubini.■

**Remarque 59** *Dans les* calculs pratiques (et élémentaires)*, il est souvent bien plus simple, à la place de ce théorème pour l'intégrale de Lebesgue, d'opérer une intégration par parties au niveau de l'intégrale de Riemann et d'utiliser ensuite la proposition 51 (voir les exercices).*

### 1.2.7 Valeur principale au sens de Cauchy

On peut parfois donner, par passage à la limite, un sens à des intégrales de fonctions non intégrables. C'est le cas des intégrales généralisées non absolument convergentes. La notion de *valeur principale* de Cauchy est encore plus audacieuse.

**Définition 60** – *Soit $f : [a,b] \to \mathbf{C}$ une fonction [mesurable]. Supposons que pour $c \in ]a,b[$ et tout $u > 0$ assez petit, $f$ est intégrable sur $[a, c-u]$ et sur $[c+u, b]$. On dit que* la valeur principale de l'intégrale de $f$ existe au point $c$ *si la suite de nombres complexes*

$$l_u = \int_{[a,c-u]} f(x)\,dx + \int_{[c+u,b]} f(x)\,dx$$

*admet une* limite finie $l$*, lorsque $u \to 0$. On notera alors*

$$l = \lim_{u\to 0} l_u = vp_c \int_{[a,b]} f(x)\,dx.$$

– *Soit $f$ intégrable sur tout intervalle borné $[-B,+B]$, mais* éventuellement pas sur tout $\mathbf{R}$. *Dans le cas où*

$$L = \lim_{B\to\infty} \int_{[-B,+B]} f(x)\,dx$$

*est un nombre* fini*, on le note*

$$L = vp_\infty \int_{\mathbf{R}} f(x)\,dx.$$

**Exemple 61** *Si $a < 0 < b$,*

$$vp_0 \int_{[a,b]} \frac{dx}{x} = \log|\frac{b}{a}|.$$

**Exemple 62** *Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $|x| \geq a$ ; $f(x) = 0$ sinon. Alors*

$$vp_\infty \int_{\mathbf{R}} f(x)\,dx = 0.$$

**Remarque 63** *1. Si $f$ est intégrable ; $vp \int f = \int f$.*

2. *On généralise d'une maniere évidente la Définition 60 pour définir $vp_{a_1,a_2,\ldots,a_n} \int f$ où chaque $a_i$ est un nombre réel ou infini.*

### 1.2.8 A retenir

Pour montrer qu'une fonction $f$ d'une variable réelle est intégrable,
- On remarque qu'elle est continue par morceaux.
- On étudie la convergence de l'intégrale généralisée de $f$ sur chacun des morceaux, à chaque borne.

Pour montrer qu'une fonction $f$ de deux variables réelles est intégrable,
- On remarque qu'elle est continue par morceaux en chaque variable.
- On étudie l'intégrabilité en une variable (méthode précédente).
- On étudie l'intégrabilité de l'intégrale par rapport à une variable comme fonction de l'autre variable (méthode précédente).

Eventuellement, il peut être utile d'effectuer préalablement un changement de variable.

## 1.3 Transformation de Fourier sur $\mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$

Dans toute cette partie du cours, il ne sera question que de l'intégrale de Lebesgue pour la mesure des longueurs $\lambda$.

**Définition 64** *Soit $f$ une fonction intégrable de $\mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$. On appelle* transformée de Fourier de $f$, *la fonction $(Ff)$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, définie, pour $u \in \mathbf{R}$, par l'intégrale*

$$(Ff)(u) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi ux} f(x)\, dx.$$

**Remarque 65**
1. *Cette fonction $(Ff)$ est définie pour tout $u \in \mathbf{R}$ car l'intégrale est finie pour tout $u$ réel. En effet,*
$$|\exp(-2i\pi ux)f(x)| = |f(x)|,$$
*et, par hypothèse, $|f| \in \mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$.*
2. *Les notations pour la transformée de Fourier sont nombreuses :*
$$(Ff)(u) = (TFf)(u) = \hat{f}(u) = \cdots$$
3. *Les conventions sont encore plus nombreuses, elles sont toutes de la forme*
$$(Ff)(u) = a^{-1} \int_{\mathbf{R}} \exp(-2ibxu) f(x)\, dx,$$
*où les coefficients numériques $a$ et $b$ contiennent un nombre varié de puissances de $2$ et de $\pi$.* Prendre garde à la convention adoptée dans l'ouvrage que vous consultez
4. *En physique, si $f(x)$ représente l'amplitude d'un signal, $(Ff)(u)$ représente sa distribution en fréquences (ou nombres d'ondes...). C'est la* distribution spectrale *du signal $f$. L'ensemble des points $u$ de $\mathbf{R}$ tels que $(Ff)(u) \neq 0$ est appelé* spectre *de $f$.*

### 1.3.1 Théorème de Riemann-Lebesgue

**Théorème 9** *Soit $f \in \mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$, alors*
1. *$Ff$ est* bornée *sur $\mathbf{R}$.*
2. *$Ff$ est* continue *sur $\mathbf{R}$.*
3. *$(Ff)(u)$* tend vers *0 quand $u$ tend vers $\pm\infty$.*

**Preuve.**
1. $|(Ff)(u)| \leq \int_{\mathbf{R}} |f(x)| dx < \infty$.
2. Exercice : appliquer le théorème de continuité sous le signe somme (Corollaire 45).

3. C'est la partie la plus longue de la démonstration, nous ne la donnerons pas. On pourra cependant vérifier que la propriété est vraie pour tous les exemples qui vont suivre.■

**Remarque 66** *En physique, ce théorème donne le comportement à l'infini de la distribution spectrale d'un signal intégrable. Il veut dire aussi que si* une seule *des trois conditions indiquées n'est pas réalisée, le signal* n'est pas *une fonction intégrable.*

Fin du cours $n^0 4$

---

**Proposition 67** *1.* $(Ff)(u) = 0 \quad \forall u \in \mathbf{R} \Rightarrow \quad f(x) = 0$ *presque partout.*

*Nous ne démontrons pas cette propriété. Indiquons cependant que la démonstration utilise le théorème de Fubini-Tonelli.*

*Son interprétation physique est interessante. Pour un signal intégrable,* si la fonction spectrale est nulle*, le signal est* nul physiquement *car mathématiquement nul presque partout.*

*2. Voici une autre application du théorème de Fubini-Tonelli. Si* $f$ *et* $g \in \mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$*, alors*

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)(Fg)(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}} (Ff)(y)g(y)\,dy. \tag{1.1}$$

**Exercice 68** *Démontrer cette formule.*

## 1.3.2 Transformée de Fourier inverse

Le résultat principal est ici un résultat négatif.

*La transformée de Fourier d'une fonction intégrable n'est pas nécessairement intégrable.*

**Exemple 69** *Soit* $f(x) = 1$ *pour* $|x| \le a$ *et* $f(x) = 0$ *pour* $|x| > a$*. Alors*

$$(Ff)(u) = \frac{\sin 2\pi u a}{\pi u},$$

*qui* n'est pas intégrable *au sens de Lebesgue sur* $\mathbf{R}$ *(cf. Exemple 50).*

En fait, *il n'existe pas* de formule d'inversion valable *pour toute* fonction $f$ de $\mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$. On a cependant le théorème suivant.

**Théorème 10** *Si* $Ff$ est intégrable *au sens de Lebesgue sur* $\mathbf{R}$*, alors*

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}} Ff(u) e^{2i\pi u x}\,du \quad p.p.\ dx.$$

**Remarque 70** *1. Il y a un* sous-espace *de fonctions de* $\mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$ *qui admet une formule d'inversion, c'est l'espace de Schwartz* $S$*, que nous introduirons par la suite.*

*2. Il y a des* espaces différents *(l'espace des fonctions dont le carré du module est intégrable sur* $\mathbf{R}$*) ou* plus vaste *(les distributions tempérées) où opère une transformée de Fourier et qui admettent des formules d'inversion (en un sens bien spécifique cependant).*

## 1.3.3 Propriétés de la transformation de Fourier sur $\mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$

1. *Linéarité*

$$F(af + bg) = a(Ff) + b(Fg)$$

pour $a$, $b \in \mathbf{C}$ et $f$, $g \in \mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$.

2. *Réalité*

- Si $f$ est à valeurs réelles, $Ff$ a la *symétrie hermitienne* suivante

$$(Ff)(-u) = \overline{(Ff)(u)}.$$

- Si $f$ a la symétrie hermitienne, $Ff$ est une fonction à valeurs réelles.

3. *Parité*
   Si $f$ est paire (impaire) $Ff$ est paire (impaire).
4. *Réalité et parité*
   Si $f$ est réelle et paire, $Ff$ l'est aussi.
5. *Translation et modulation*
   - Si$f_z(x) = f(x-z)$ définit la translatée $f_z$ de $f$ d'une quantité $z$, on a

   $$(Ff_z)(u) = e^{-2i\pi uz}(Ff)(u).$$

   - Pour $f \in \mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$, posons $h_v(x) = e^{2i\pi vx}f(x)$, où $v \in \mathbf{R}$. Alors

   $$(Fh_v)(u) = (Ff)(u-v).$$

6. *Dilatation*
   Pour $f \in \mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$, et $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, posons $g_a(x) = f(\frac{x}{a})$. Alors

   $$(Fg_a)(u) = |a|(Ff)(au).$$

**Remarque 71** *Les dilatations portant sur $f$ et $Ff$ vont* en sens inverse *l'une de l'autre, ce qui veut dire que si on étale $f$ d'un facteur $a^{-1}$, on va contracter $Ff$ d'un facteur $a$. L'interprétation physique de cette propriété mathématique est claire :*
La fonction spectrale d'un signal est d'autant plus étalée que le signal est étroit.

### 1.3.4 Exemples

| $f(x)$ | $Ff(u)$ | |
|---|---|---|
| $e^{-b\|x\|} \quad (b>0)$ | $\dfrac{2b}{4\pi^2u^2+b^2}$ | (1) |
| $\dfrac{1}{x^2+a^2} \quad (a>0)$ | $\dfrac{\pi}{a}e^{-2\pi a\|u\|}$ | (2) |
| $e^{-ax^2} \quad (a>0)$ | $(\pi/a)^{\frac{1}{2}}\exp(-\pi^2u^2/a)$ | (3) |
| $\Pi(x)$ | $\dfrac{\sin(2\pi ua)}{\pi u}$ et $F\Pi(0)=0$ | (4) |

où la fonction $\Pi$ est la *fonction porte* définie par

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \le a; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Remarque 72** *La transformée de Fourier $F(f)$ d'une fonction intégrable $f$ n'est pas toujours une fonction intégrable, comme le montre l'exemple de la fonction* $\Pi$.

### 1.3.5 Comportement à l'infini de $f$ et dérivabilité de $Ff$

On démontre facilement que si $f$ et $xf$ sont *intégrables*, alors $Ff$ est *dérivable* et

$$(Ff)'(u) = (F[-2i\pi xf])(u).$$

Plus généralement, on a la proposition suivante.

**Proposition 73** *Si $f, xf, \ldots, x^p f$ sont intégrables, alors $(Ff)$ admet des dérivées jusqu'à l'ordre $p$ et, pour $k = 1, 2, \ldots p$,*

$$(Ff)^{(k)}(u) = (F[(-2i\pi x)^k f])(u).$$

Inversement, la transformée de Fourier de la dérivée $f'$ s'obtient au moyen de celle de $f$ dès que $f$ est absolument continue et $f'$ intégrable.

**Proposition 74** *Supposons que $f$ soit* absolument continue *sur tout intervalle borné de $\mathbf{R}$ et que $f'$ (qui existe p.p.) $\in \mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$, alors*

$$(Ff')(u) = 2i\pi u(Ff)(u).$$

Généralisation : Si $f \in \mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$ est telle que $f^{(p-1)}$ est absolument continue sur tout intervalle borné et que $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots f^{(p)} \in \mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$, alors, pour $k = 1, 2, \cdots p$,

$$(Ff^{(k)})(u) = (2i\pi u)^k (Ff)(u).$$

## 1.4 Convolution dans $\mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$

**Définition 75** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions intégables sur $\mathbf{R}$ pour la mesure de Lebesgue des longueurs (appartenant à $\mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$). On appelle* convolution *de $f$ et de $g$, la fonction $h$ définie par l'intégrale*

$$h(x) = \int_{\mathbf{R}} f(t)g(x-t)\,dt.$$

*On note $h = f \star g$.*

### 1.4.1 Propriétés de la fonction convolution

1. La fonction $h$ est définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ à un ensemble de mesure nulle près.
2. La fonction $h$ appartient à $\mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$.

   **Preuve.** Soit $G(x,t) = f(t)g(x-t)$. C'est une fonction de deux variables, [mesurable] et *positive*. On a donc, par Fubini-Tonelli

   $$\int_{\mathbf{R}^2} |G(x,t)|\,dx\,dt = \int_{\mathbf{R}} |f(t)|(\int_{\mathbf{R}} |g(x-t)|\,dx)\,dt.$$

   Comme

   $$\int_{\mathbf{R}} |g(x-t)|\,dx = \int_{\mathbf{R}} |g(x)|dx,$$

   on a, par linéarité,

   $$\int_{\mathbf{R}^2} |G(x,t)|\,dx\,dt = (\int_{\mathbf{R}} |f(t)|\,dt)(\int_{\mathbf{R}} |g(x)|\,dx).$$

   La fonction $|G(x,t)|$ est donc intégrable sur $\mathbf{R}^2$ et par conséquent $G(x,t)$ l'est aussi. Par la seconde partie du théorème de Fubini-Tonelli on a donc

   $$\int_{\mathbf{R}} h(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}}(\int_{\mathbf{R}} f(t)g(x-t)\,dt)\,dx = \int_{\mathbf{R}^2} G(x,t)\,dx\,dt.$$

   Ce qui veut dire que $h$ est *intégrable* et par conséquent, elle doit être *définie presque partout* en $x$.■

Fin du cours $n^0 5$

3. Si $f$ est une fonction *bornée*, une étude plus avancée montre que $f \star g$ est
   – *Continue.*
   – *Bornée.*

   On dit que $f \star g$ est une *régularisée* de $g$.

### 1.4.2 Propriétés algébriques du produit de convolution dans $\mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$

Dans ce paragraphe, toutes les fonctions sont dans $\mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$.

1. *Commutativité*

$$f \star g = g \star f.$$

2. *Distributivité*

$$\text{Si } a,\, b \in \mathbf{C}, \quad f \star (ag + bh) = a(f \star g) + b(f \star h).$$

3. *Associativité*

$$f \star (g \star h) = (f \star g) \star h.$$

On dit que $\mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$ forme une algèbre pour l'addition et le produit $\star$, appelée *algèbre de convolution.*

### 1.4.3 Produit de convolution et transformée de Fourier

**Théorème 11** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$, alors*

$$F(f \star g) = (Ff)(Fg).$$

**Preuve.** C'est une application directe du théorème de Fubini-Tonelli.■

Fin du cours $n^0 6$

Autrement dit, la transformation de Fourier $F$ réalise un homomorphisme algébrique de l'algèbre de convolution $\mathcal{L}_\mu(\mathbf{R})$ (avec les opérations $\star$ et $+$ ) dans[4] l'algèbre des fonctions continues et bornées qui tendent vers zéro à l'infini (Opérations de multiplication et d'addition ordinaires).

**Exercice 76** *On pose $P_a(x) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{a^2+x^2}$, où $a > 0$.*

1. *Démontrer que*

$$(F(P_a \star P_b))(u) = (F(P_{a+b}))(u).$$

2. *En déduire l'expression de $P_a \star P_b$.*

### 1.4.4 Interprétation physique du produit de convolution

Supposons qu'un appareil donné ait une réponse $G(t)$ lorsqu'on lui applique une impulsion $e(t)$ (à définir correctement), alors, sous certaines conditions physiques, si $G(t)$ est intégrable, sa réponse à un signal intégrable $f(t)$ sera la fonction $h$ donnée par

$$h(t) = \int_{\mathbf{R}} G(u)f(t-u)du = (G \star f)(t).$$

[4]Inclusion *stricte*, car par exemple la fonction $f(t) = t/(1 + |t|)\ell n(|t|)$ n'est l'image d'aucune fonction intégrable par $F$.

### 1.4.5 Réponse impulsionnelle

Supposons qu'un dispositif (par exemple, électronique) réalise sur les signaux une opération $f \mapsto P(f)$, donnée par le produit de convolution avec une fonction $G$. Comment trouver $G$ ? Cette fonction s'appelle la *réponse impulsionnelle* de l'appareil.

Supposons qu'il existe une fonction intégrable $\Delta$ telle que pour *toute fonction* de $\mathcal{L}_\lambda(\mathbf{R})$ on ait

$$\Delta \star f = f.$$

En d'autres termes, on voudrait une unité pour le produit de convolution dans $\mathcal{L}_\lambda(\mathbf{R})$. Alors la réponse impulsionnelle est $G = P(\Delta)$, i.e. la réponse de l'appareil à un signal entrant $\Delta$.

**Proposition 77** *Il n'existe pas d'unité pour le produit de convolution dans* $\mathcal{L}_\lambda(\mathbf{R})$.

**Preuve.** Supposons le contraire. On aurait alors, pour tout $f \in \mathcal{L}_\lambda(\mathbf{R})$,

$$(F\Delta)(Ff) = (Ff).$$

Soit en prenant par exemple $f(x) = f_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$,

$$F\Delta = 1,$$

ce qui est impossible, par le Théorème de Riemann-Lebesgue 9, si $\Delta \in \mathcal{L}_\lambda(\mathbf{R})$.■

Il semble bien que l'espace $\mathcal{L}_\lambda(\mathbf{R})$ des fonctions intégrables au sens de Lebesgue, pour la mesure des longueurs, soit *insuffisant* pour les besoins de la physique. Le signal unité qui lui échappe, c'est l'*impulsion unité*, infiniment courte, ce n'est pas une fonction intégrable, mais un objet encore moins régulier appelé *distribution*.

### 1.4.6 Filtre passe-bande

Un *filtre passe-bande*, c'est un dispositif qui étouffe d'un signal toutes les harmoniques dont les fréquences sont situées en dehors d'un intervalle $[m, M]$.

On rappelle que pour un signal $f$ périodique de période $2\pi$, le $n$-ème harmonique s'écrit

$$a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) = c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int},$$

où $a_n$ et $b_n$ (resp. $c_n$) sont les coefficients de Fourier trigonométriques (resp. exponentiels) de $f$. Pour un signal $f$ non périodique mais intégrable, il y a des harmoniques dans toutes fréquences $u \in \mathbf{R}_+$,

$$Ff(u)e^{2i\pi ut} + Ff(-u)e^{-2i\pi ut}.$$

Etouffer les harmoniques de fréquences situées en dehors de $[m, M]$, c'est transformer un signal $f$ en un signal $g$ tel que

$$F(g) = \chi F(f),$$

où $\chi$ est la fonction caractéristique de de la réunion des intervalles $[-M, -m] \cup [m, M]$.

Supposons connue une fonction $h$ telle que $Fh = \chi$. Alors $\chi F(f) = F(h)F(f) = F(h \star f)$. Donc la solution du problème est l'opérateur $f \mapsto h \star f$. Comment trouver $h$ ? Il suffit de calculer $F^{-1}\chi$. Or $\chi = \Pi_M - \Pi_m$ est une différence de fonctions portes, donc

$$h(u) = (F^{-1}\chi)(u) = \frac{\sin(2\pi M u) - \sin(2\pi m u)}{\pi u}.$$

Cette fonction n'est en général pas intégrable, mais c'est malgré tout la solution du problème posé. Ce n'est pas la fonction $h$ qui est mauvaise, c'est l'espace $\mathcal{L}_\lambda(\mathbf{R})$ qui est mal adapté.

### 1.4.7 Epilogue

On voit l'intérêt de dégager des espaces de fonctions sur lesquels la transformation de Fourier est une bijection et la convolution est bien définie. Deux tels espaces vont être brièvement évoqués dans la suite : l'espace des fonctions de carré intégrable et l'espace de Schwartz.

## 1.5 Supplément [1] : Fonctions de carré intégrable

### 1.5.1 Fonctions de carré intégrable

**Définition 78** *Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ est dite* de carré intégrable *(on dit aussi $L^2$) si elle est [mesurable], et si $t \mapsto |f(t)|^2$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.*

**Exemple 79**
- *Si $f$ est intégrable et bornée, alors $f$ est de carré intégrable.*
- *La fonction $f$ définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 1/x$ pour $|x| > 1$ et $f(x) = 0$ sinon est de carré intégrable, mais n'est pas intégrable.*

**Remarque 80** *L'intégrale $\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2\, dt$ représente l'*énergie *totale nécéssaire pour produire le signal. Par conséquent, pour des raisons physiques, un signal a de bonnes raisons d'être de carré intégrable.*

Lorsqu'une fonction $f$ est continue sur $\mathbf{R}$ mais non intégrable, on peut tout de même espérer définir sa transformée de Fourier comme une valeur principale, i.e. poser

$$(Ff)(u) = \lim_{T\to+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(x)e^{-2i\pi ux}\, dx.$$

Autrement dit, on approche $f$ par les fonctions $f_T = \chi_{[-T/2,T/2]}f$ nulles en dehors d'un intervalle borné, et on doit prouver la convergence des transformées de Fourier $Ff$, au moins presque partout.

On va esquisser ce programme dans le cas des fonctions de carré intégrable.

**Lemme 81** *La formule de Plancherel-Parseval*

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2\, dx = \int_{\mathbf{R}} |(Ff)(u)|^2\, du,$$

*est vraie lorsque $f$ et $g$ sont continues par morceaux, bornées et nulles en dehors d'un intervalle borné.*

**Preuve.** Pour $T$ assez grand, $f$ est nulle en dehors de $[-T/2, T/2]$, donc on peut en faire une fonction continue par morceaux, périodique de période $T$, qu'on note $f_T$. On calcule les coefficients de Fourier exponentiels de $f_T$,

$$\begin{aligned} c_n(f_T) &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-2\pi int/T}\, dt \\ &= \frac{1}{T}(Ff)(\frac{n}{T}). \end{aligned}$$

On applique l'identité de Bessel-Parseval à $f_T$. Cela donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2\, dt &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f_T)|^2 \\ &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} |\frac{1}{T}(Ff)(\frac{n}{T})|^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2\,dt = \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbf{Z}} |(Ff)(\frac{n}{T})|^2.$$

On reconnaît à droite une somme de Riemann généralisée (il y a une infinité de termes). Comme $f$ est intégrable, la fonction $u \mapsto |(Ff)(u)|^2$ est continue et tend vers 0 à l'infini. Cela suffit pour conclure que la somme de droite converge, quand $T$ tend vers $+\infty$, vers $\int_{\mathbf{R}} |Ff(u)|^2\,du$, d'où

$$\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2\,dt = \int_{\mathbf{R}} |Ff(u)|^2\,du.\blacksquare$$

### 1.5.2 Définition de la transformation de Fourier

Soit $f$ une fonction bornée, continue par morceaux, de carré intégrable sur $\mathbf{R}$. On approche $f$ par les fonctions $f_n = \chi_{[-n,n]}f$. Le lemme 81 montre que, pour tous $n$, $m$,

$$\int_{\mathbf{R}} |F(f_m)(u) - F(f_n)(u)|^2\,du = \int_{\mathbf{R}} |f_m(t) - f_n(t)|^2\,dt,$$

qui tend vers 0 quand $m$ et $n$ tendent vers $+\infty$. Cela entraîne (on l'admet) que la suite de fonctions $Ff_n$ converge presque partout vers une fonction de carré intégrable notée $Ff$, et que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{R}} |Ff(u) - F(f_n)(u)|^2\,du = 0.$$

C'est ainsi que l'on définit la transformée de Fourier d'une fonction continue par morceaux, de carré intégrable. Remarquer que, pour presque tout $u \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} Ff(u) &= \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} f(t)e^{-2i\pi tu}\,dt \\ &= vp_\infty \int f(t)e^{-2i\pi tu}\,dt. \end{aligned}$$

Par un nouveau passage à la limite, la définition s'étend à toutes les fonctions de carré intégrable.

**Exemple 82** *Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 1/x$ pour $|x| > 1$ et $f(x) = 0$ sinon. Alors $f$ est de carré intégrable, et, pour presque tout $u$,*

$$Ff(u) = -2i \int_{\pi|u|}^{\to+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Noter que cette formule n'est pas vraie pour $u = 0$ (Exemple 62).

### 1.5.3 Propriétés

**Proposition 83** *Soient $f$ et $g$ des fonctions de carré intégrable sur $\mathbf{R}$. Alors on a simultanément*

$$\int_{\mathbf{R}} f(t)Fg(t)\,dt = \int_{\mathbf{R}} g(t)Ff(t)\,dt.$$

*la formule de Plancherel-Parseval,*

$$\int_{\mathbf{R}} |f(t)|^2\,dt = \int_{\mathbf{R}} |Ff(u)|^2\,du,$$

*et sa conséquence,*

$$\int_{\mathbf{R}} f(t)\overline{g(t)}\,dt = \int_{\mathbf{R}} Ff(u)\overline{Fg(u)}\,du.$$

**Preuve.**

La première formule, ainsi que la formule de Plancherel-Parseval, se démontrent par approximation d'une fonction de carré intégrable quelconque par des fonctions continues et nulles en dehors d'un compact.

Pour démontrer la troisième, on applique la formule de Plancherel-Parseval à $f+g$. Il vient

$$\int_{\mathbf{R}} f(t)\overline{g(t)}\,dt + \int_{\mathbf{R}} g(t)\overline{f(t)}\,dt = \int_{\mathbf{R}} Ff(u)\overline{Fg(u)}\,du + \int_{\mathbf{R}} Fg(u)\overline{Ff(u)}\,du.$$

Enfin, on remplace $g$ par $ig$. Il vient

$$-i\int_{\mathbf{R}} f(t)\overline{g(t)}\,dt + i\int_{\mathbf{R}} g(t)\overline{f(t)}\,dt = -i\int_{\mathbf{R}} Ff(u)\overline{Fg(u)}\,du + i\int_{\mathbf{R}} Fg(u)\overline{Ff(u)}\,du,$$

et, en ajoutant,

$$\int_{\mathbf{R}} f(t)\overline{g(t)}\,dt = \int_{\mathbf{R}} Ff(u)\overline{Fg(u)}\,du.\blacksquare$$

### 1.5.4 Formule d'inversion

**Théorème 12** *Si $f$ est de carré intégrable, alors $F(f)$ l'est aussi. Réciproquement, toute fonction de carré intégrable est la transformée de Fourier d'une fonction de carré intégrable. Autrement dit, la transformation de Fourier est une bijection de l'espace des fonctions de carré intégrable sur lui-même, dont la réciproque est donnée par la formule*

$$(F^{-1}h)(x) = \int_{\mathbf{R}} h(u)e^{2i\pi ux}\,du.$$

**Preuve.** On combine les deux formules de la Proposition 83. Pour toute fonction $g$ de carré intégrable sur $\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}} F(\overline{Ff})(u)g(u)\,du &= \int_{\mathbf{R}} \overline{Ff}(u)Fg(u)\,du\\ &= \int_{\mathbf{R}} Fg(u)\overline{Ff(u)}\,du\\ &= \int_{\mathbf{R}} g(x)\overline{f(x)}\,dx,\end{aligned}$$

ce qui entraîne que, presque partout, $f(x) = \overline{F(\overline{Ff})(x)} = \int_{\mathbf{R}} Ff(u)e^{2i\pi ux}\,du.\blacksquare$

## 1.6 Supplément [2] : L'espace de Schwartz $S$

**Définition 84** *Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ une fonction. On dit que $f$ est un élément de l'espace $S$ si*

- $\frac{d^m}{dx^m}f(x) = f^{(m)}(x)$ *existe pour tout $m = 0, 1, \ldots$.*
- *pour tous les entiers $p$ et $q$, il existe une constante $C_{p,q}$ (dépendant de $f$) telle que pour tout $x\in\mathbf{R}$,*

$$|x^p f^{(q)}(x)| < C_{p,q}.$$

**Exemple 85** *Les fonctions propres, d'énergie donnée, de l'oscillateur harmonique en mécanique quantique sont dans $S$ :*

$$f_n(x) = H_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

*où $H_n$ est un polynôme de degré $n$ en $x$ (polynôme d'Hermite).*

**Propriétés**

1. L'ensemble $S$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$.
2. Les fonctions $g_{pq}(x) = x^p f^{(q)}$ sont aussi dans $S$ pour $p, q = 0, 1, \ldots$
3. Les fonctions $g_{pq}(x) = x^p f^{(q)}(x)$ pour $p, q = 0, 1, \cdots$, sont intégrables.
4. La fonction $(Ff)(u)$ est définie pour $u \in \mathbf{R}$ et, pour $k = 0, 1, \ldots$,

$$(Ff)^{(k)}(u) = F[(-2i\pi x)^k f](u).$$

**Théorème 13** *Si $f$ appartient à $S$, alors $F(f)$ appartient à $S$. Réciproquement, tout élément de $f$ est la transformée de Fourier d'un élément de $S$. Autrement dit, la transformation de Fourier est une bijection de $S$ sur $S$, dont la réciproque est donnée par la formule*

$$(F^{-1}g)(u) = \int_{\mathbf{R}} e^{2i\pi ux} g(x)\, dx$$

**Preuve.** D'après la Proposition 73, $\frac{d^p}{dx^p}(Ff)(u)$ est définie pour $p = 1, 2, \ldots$.
Soit $h(x) = (-2i\pi x)^p f(x)$. Alors la dérivée d'ordre $q$

$$\frac{d^q}{dx^q}[x^p f(x)] = \sum_m \frac{q!}{m!(q-m)!}(x^p)^{(m)} f(x)^{q-m}$$

est une combinaison linéaire de fonctions de $S$ et par conséquent $h \in S$. D'autre part,

$$(Ff)^{(p)}(u) = F[(-2i\pi x)^p f](u) = (Fh)(u).$$

La fonction $h$ est une fonction de $S$, elle est donc de toute évidence absolument continue et intégrable ainsi que toutes ses dérivées $h^{(q)}$. D'après la Proposition 73, on a, pour $q = 0, 1, \ldots$,

$$(2i\pi u)^q (Fh)(u) = (Fh^{(q)})(u),$$

soit

$$(2i\pi u)^q (Ff)^{(p)} = ((Fh)^{(q)})(u),$$

d'où

$$|u^q (Ff)^{(p)}| \leq c \int_{\mathbf{R}} |h^{(q)}(x)|\, dx \leq D_{q,p}.$$

Réciproquement, soit $g$ une fonction de $S$. D'après ce qui précède, sa transformée de Fourier

$$\tilde{f}(x) = \int_{\mathbf{R}} g(u) e^{-2i\pi xu}\, du \equiv (Fg)(x)$$

appartient à $S$. Posons $f(x) = \tilde{f}(-x)$. Il est évident que $f \in S$. D'autre part, puisque $\tilde{f} \in S$, elle est intégrable. On peut donc lui appliquer la formule d'inversion

$$g(u) = \int_{\mathbf{R}} \tilde{f}(x) e^{2i\pi ux}\, dx \qquad \text{p.p. } (du).$$

Comme les deux membres de cette égalité sont des fonctions continues, on a donc *pour tout* $u \in \mathbf{R}$

$$g(u) = \int_{\mathbf{R}} \tilde{f}(x) e^{2i\pi ux}\, dx$$

Soit en changeant $x$ en $-x$ dans l'intégrale,

$$\begin{aligned} g(u) &= \int_{\mathbf{R}} \tilde{f}(-x) e^{-2i\pi ux} dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-2i\pi ux} dx \\ &= (Ff)(u). \end{aligned}$$

La fonction $g$ est bien la transformée de Fourier d'une fonction $f$ de $S$, i.e. $f = F^{-1}g$.■

**Remarque 86** *1. Pour $f \in S$, on a donc*

$$F^{-1}(Ff) = F(F^{-1}f) = f.$$

*2. Il est commode de noter $F^{-1} = \bar{F}$, ce qui rappelle le changement de $+i$ en $-i$ dans la formule définissant $F^{-1}$, mais attention, $F^{-1}f \neq \overline{Ff}$ !*

**Théorème 14** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions de $S$, alors*

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbf{R}} (Ff)(u)\overline{(Fg)(u)}\,du.$$

D'après le théorème II

$$f(x) = \int_{\mathbf{R}} (Ff)(u)e^{2i\pi ux}du$$

Donc

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbf{R}}[\int_{\mathbf{R}} (Ff)(u)e^{2i\pi ux}du]\overline{g(x)}dx$$

Comme la fonction $(Ff)(u)\overline{g(x)}e^{2i\pi ux}$ est intégrable sur $\mathbf{R}^2$, on a par Fubini

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\overline{g(x)} = \int_{\mathbf{R}} (Ff)(u)[\int_{\mathbf{R}} \overline{g(x)}e^{2i\pi ux}\,dx]\,du.$$

Or, par linéarité

$$\overline{(Fg)(u)} = \int_{\mathbf{R}} \overline{g(x)}e^{2i\pi ux}\,dx.$$

Donc

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbf{R}} (Ff)(u)\overline{Fg(u)}\,du.$$

**Corollaire 87** (Parseval-Plancherel). *Soit $f \in S$, alors*

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2\,dx = \int_{\mathbf{R}} |(Ff)(u)|^2\,du.$$

**Remarque 88** *Le Théorème 14* n'est pas valable *pour des fonctions qui sont seulement intégrables. Dans ce cas, seule la formule 1.1 est vraie.*

## 1.7 Supplément [3] : Sommes de Lebesgue

L'intégrale de Lebesgue, dont nous avons indiqué la construction, peut se calculer numériquement (et aussi se définir) par un procédé sommatoire analogue aux sommes de Riemann pour l'intégrale de Riemann.

**Définition 89** (Lebesgue). *Soit $\mu$, une mesure donnée sur $\mathbf{R}^n$. Une fonction* positive *$f$ définie (p.p.$\mu$) sur $\mathbf{R}^n$ est intégrable au sens de Lebesgue par rapport à $\mu$, si les sommes de Lebesgue*

$$S_N(f) = \sum_{i=1}^{N} y_{i-1}\mu(f^{-1}[y_{i-1}, y_i[)$$

*ont une* limite finie *(égale à $I_\mu(f)$) lorsque $y_N \to \infty$, $y_1 \to 0$, $\sup_{1\leq i\leq N}(y_i - y_{i-1}) \to 0$, pour tous les $y_0, y_1, \cdots y_N$ tels que*

$$0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{N-1} < y_N.$$

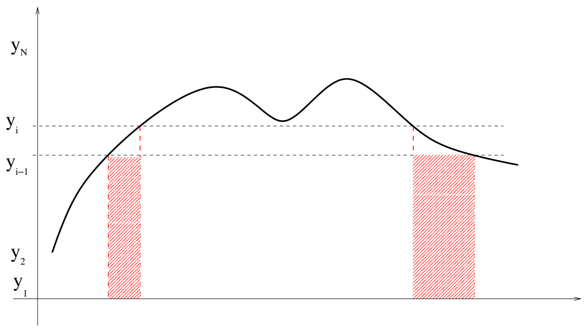
**Remarque 90** *1. Cette définition exige que l'ensemble des $\vec{x} \in R^n$ tels que $\vec{x} \in f^{-1}[y_{i-1}, y_i[$ soit un ensemble [mesurable] (voir définition 36) et non pas un intervalle $J_i$ comme c'est le cas pour les sommes de Riemann (Proposition 34).*

2. *Contrairement aux sommes de Riemann, on n'exige pas que $f$ soit bornée ni qu'elle soit nulle à l'extérieur d'un intervalle borné.*

Dans le cas où la mesure considérée est *la mesure des longueurs* $\lambda$, le nombre positif

$$y_{i-1}\lambda(f^{-1}[y_{i-1}, y_i[)$$

représente l'aire de la surface hachurée.




**Remarque 91** *La sommation de Lebesgue est en fait la sommation naturelle du calcul des probabilités.*

*En effet, si $\mu$ est une mesure de probabilité, le nombre*

$$\mu(f^{-1}[y_{i-1}, y_i[)$$

*est égal à la probabilité pour que la variable aléatoire (positive) $f$ prenne ses valeurs dans l'intervalle $[y_{i-1}, y_i[$. Dans ce cas, on a bien évidemment $\mu(f^{-1}[0, \infty[) = 1$.*

Pour évaluer l'intégrale de Lebesgue d'une fonction intégrable de signe quelconque on pourra évaluer séparément les sommes de Lebesgue de sa partie positive puis de sa partie négative, et en faire la différence. L'intégrale d'une fonction intégrable à valeurs complexes est, quant à elle, égale à l'intégrale de sa partie réelle plus $i$ fois l'intégrale de sa partie imaginaire.

## 1.8 Supplément [4] : Transformation de Fourier en plusieurs variables

### 1.8.1 Premières propriétés

On se place dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$, $n = 2$ ou 3. On note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le produit scalaire de deux vecteurs.

**Définition 92** *Soit $f \in \mathcal{L}_\lambda(\mathbf{R}^n)$ une fonction intégrable sur $\mathbf{R}^n$. Sa transformée de Fourier est la fonction $Ff$ définie par*

$$(Ff)(\vec{k}) = \int_{\mathbf{R}^n} f(\vec{x}) e^{-2i\pi\vec{k}\cdot\vec{x}}\, d^n\vec{x}.$$

**Proposition 93** 1. *Si $f \in \mathcal{L}_\lambda(\mathbf{R}^n)$, $Ff$ est continue et bornée sur $\mathbf{R}^n$.*

2. *Si $f \in \mathcal{L}_\lambda(\mathbf{R}^n)$ et si $\vec{x} \mapsto \| \vec{x} \| f(\vec{x})$ est intégrable sur $\mathbf{R}^n$, $Ff$ admet des dérivées partielles, et*

$$\frac{\partial(Ff)}{\partial k_j} = F(-2i\pi x_j f).$$

3. *La transformation de Fourier $F$ est linéaire.*

### 1.8.2 Formule d'inversion

**Théorème 15** *Si $f$ et $Ff$ sont intégrables sur $\mathbf{R}^n$, alors pour presque tout $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$,*

$$f(\vec{x}) = \int_{\mathbf{R}^n} (Ff)(\vec{k}) e^{2i\pi\vec{k}\cdot\vec{x}}\, d^n\vec{k}.$$

### 1.8.3 Interprétation

Pour chaque vecteur $\vec{k}$, la fonction $\vec{x} \mapsto e^{-2i\pi\vec{k}\cdot\vec{x}}$ est l'amplitude complexe d'une *onde plane* de *vecteur d'onde* $\vec{k}$ et dont la phase vaut 0 à l'origine. La formule d'inversion exprime une onde $f$ comme combinaison de telles ondes planes. Les coefficients (amplitudes), vus comme fonction d'un vecteur d'onde, sont données par la transformée de Fourier.

### 1.8.4 Cas des fonctions invariantes par rotation

**Définition 94** *Une fonction $f$ sur $\mathbf{R}^n$ est* invariante par rotation *si, pour toute rotation $\mathcal{R}$ fixant l'origine et tout $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$, $f(\mathcal{R}(\vec{x})) = f(\vec{x})$, i.e. $f \circ \mathcal{R} = f$.*

**Remarque 95** *Une fonction $f$ sur $\mathbf{R}^n$ est invariante par rotation si et seulement si elle s'écrit $f(\vec{x}) = \psi(r)$ où $r = \sqrt{\| \vec{x} \|} = \sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2}$.*

**Proposition 96** *Soit $f$ une fonction invariante par rotation, $f(\vec{x}) = \psi(r)$. Alors sa transformée de Fourier est aussi invariante par rotation,*

$$Ff(\vec{k}) = \Psi(k), \quad k = \sqrt{\| \vec{k} \|} = \sqrt{k_1^2 + \cdots k_n^2},$$

*où $\Psi$ est la* transformée de Hankel *de $\psi$, donnée par la formule*

$$\Psi(\rho) = \int_0^{+\infty} \psi(r) \frac{2\sin(2\pi kr)}{kr} r^2\, dr.$$

**Preuve.** L'invariance par rotation résulte de l'invariance par rotation du produit scalaire et de la formule de changement de variable. En effet, une rotation $\mathcal{R}$ a un déterminant égal à 1, donc

$$\begin{aligned} Ff(\mathcal{R}\vec{k}) &= \int_{\mathbf{R}^3} f(\vec{x}) e^{-2i\pi\vec{x}\cdot\mathcal{R}(\vec{k})}\, d^3\vec{x} \\ &= \int_{\mathbf{R}^3} f(\vec{x}) e^{-2i\pi\mathcal{R}^{-1}(\vec{x})\cdot\vec{k}}\, d^3\vec{x} \\ &= \int_{\mathbf{R}^3} f(\mathcal{R}(\vec{y})) e^{-2i\pi\vec{y}\cdot\vec{k}}\, d^3\vec{y} \\ &= F(f \circ \mathcal{R})(\vec{k}). \end{aligned}$$

Si $f$ est invariante par rotation, $f \circ \mathcal{R} = f$, donc $(Ff) \circ \mathcal{R} = Ff$ pour toute rotation $\mathcal{R}$, i.e. $Ff$ est invariante par rotation.

Soit $k > 0$. On utilise les coordonnées sphériques $(r, \theta, \phi)$, où $x = r\cos\theta\cos\phi$, $y = r\cos\theta\sin\phi$, $z = r\sin\theta$, dont le déterminant jacobien est $r^2\cos\theta$.

$$\begin{aligned} \Phi(k) &= Ff((0,0,k)) \\ &= \int_D f(x,y,z) e^{-2i\pi kz}\, dx\, dy\, dz \\ &= \int_{r>0,\, -\pi/2<\theta<\pi/2, -\pi<\phi<\pi} \psi(r) e^{-2i\pi kr\sin\theta} r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta\, d\phi \\ &= \int_0^{+\infty} \psi(r) I(kr) r^2\, dr, \end{aligned}$$

où

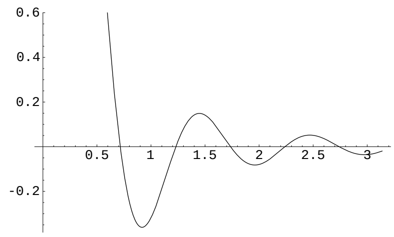
$$\begin{aligned} I(t) &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-2i\pi t \sin\theta} \cos\theta \, d\theta \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} e^{-2i\pi t u} \, du \\ &= \frac{e^{-2i\pi t} - e^{2i\pi t}}{-it} \\ &= \frac{2\sin(2\pi t)}{t}. \blacksquare \end{aligned}$$

**Exemple 97** *Transformée de Fourier de la boule de rayon $R$.*

Soit $f$ la fonction caractéristique de la boule $B$ de rayon $R$ dans $\mathbf{R}^3$. Alors $f(x,y,z) = \psi(r)$ où $\psi$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $]0,1[$. D'après la Proposition 96,

$$\begin{aligned} \Psi(k) &= \frac{2}{k}\int_0^1 \sin(2\pi k r) r \, dr \\ &= -\frac{2}{k}[\frac{r\cos(2\pi k r)}{2\pi k}]_0^1 + \frac{2}{k}\int_0^1 \frac{\cos(2\pi k r)}{2\pi k} \, dr \\ &= -\frac{\cos(2\pi k)}{\pi k^2} + \frac{\sin(2\pi k)}{2\pi^2 k^3}, \end{aligned}$$

dont voici la courbe représentative.




### 1.8.5 Interprétation

La boule modélise un obstacle qui diffracte un faisceau lumineux cohérent incident dans toutes les directions, de façon isotrope. C'est une approximation de la diffraction des rayons X par un atome, par exemple. La restriction du carré du module de la transformée de Fourier à un plan donne la figure de diffraction familière, formée d'anneaux concentriques.

## 1.9 Bibliographie


- Il y a peu d'ouvrages élémentaires qui exposent la mesure et l'intégration au sens de Lebesgue, citons cependant
  - A.J. WEIR, *Lebesgue integration and measure*, Cambridge University Press.
- Ouvrages généraux sur le cours.
  - C. GASQUET, P. WITOMSKI, *Analyse de Fourier et applications,* Masson.
  - H. REINHARD, *Cours de mathématique du signal*, Dunod Université.
- Recueil d'exercices corrigés.
  - F. BAYEN, C. MARGARIA, *Problèmes de mathématiques appliquées*, Ellipses.
- Cours complet avec exercices corrigés.
  - P. BENOIST-GUEUTAL, M. COURBAGE, *Mathématiques pour la physique*, Eyrolles.