Feuille d'Exercices 5

Espaces vectoriels (suite)

Exercice 1

Soit U le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 / \quad 2x - 2y - z + t = 0 \right\}$$

Déterminer la dimension et une base de U. Déterminer un supplémentaire de U.

Exercice 2

1. Les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{d}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont-ils linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$?
2. Déterminer la dimension et une base de F sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, engendré par les vecteurs a, b, c, d et noté $F = [\, a, b, c, d \,]$. En déduire le rang de la famille $\{ a, b, c, d \}$.
3. Déterminer un système d'équations caractérisant F.
4. Déterminer un supplémentaire de F.

Exercice 3

Soit V le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $\vec{v}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer la dimension et une base de V, ainsi qu'un système d'équations le caractérisant.

Exercice 4

Soit la famille $\{ P_1, P_2, P_3, P_4 \}$ de polynômes de $\mathbb{P}_3(X)$ définis par :

$$P_1(X) = 1 \quad , \quad P_2(X) = 1 - X \quad , \quad P_3(X) = (1 - X)^2 \quad , \quad P_4(X) = (1 - X)^3$$

Montrer que c'est une base de $\mathbb{P}_3(X)$.

Exercice 5

Caractériser le sous espace vectoriel de $\mathbb{P}_2(X)$ engendré par la famille $\{ P_1, P_2, P_3, P_4 \}$ définie par :

$$P_1(X) = 1 \quad , \quad P_2(X) = (1 + X)^2 \quad , \quad P_3(X) = (1 - X)^2 \quad , \quad P_4(X) = X^2.$$

Exercice 6

Soit U et V les sous espaces de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$U = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ y + z + t = 0 \}$

$V = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x + y = 0 \ ; \ z = 2t \}$

Déterminer la dimension et une base des sous espaces U, V et $U \cap V$.
Que peut-on dire de $U + V$? La somme est-elle directe ?

Exercice 7

Soit X le sous espace de $\mathbb{R}^5$ engendré par les vecteurs $\vec{u}_1\begin{pmatrix}3\\2\\3\\-1\\2\end{pmatrix}, \vec{u}_2\begin{pmatrix}1\\2\\1\\-1\\-2\end{pmatrix}, \vec{u}_3\begin{pmatrix}1\\-6\\1\\3\\14\end{pmatrix}$
et Y le sous espace de $\mathbb{R}^5$ engendré par les vecteurs $\vec{v}_1\begin{pmatrix}3\\4\\3\\-2\\-2\end{pmatrix}, \vec{v}_2\begin{pmatrix}-2\\-3\\-3\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{v}_3\begin{pmatrix}2\\1\\-3\\-3\\2\end{pmatrix}$.

1. Déterminer la dimension et une base de X ainsi qu'un système d'équations le caractérisant.
2. Faire de même pour Y.
3. Déterminer une base et la dimension de $X + Y$.
4. X et Y sont-ils en somme directe ?
5. En déduire la dimension de $X \cap Y$.
6. Déterminer une base de $X \cap Y$.

Exercice 8

1. Pour quelles valeurs de α les vecteurs suivants forment ils une base de $\mathbb{R}^4$? :

   $$\vec{v}_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}, \vec{v}_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{v}_3\begin{pmatrix}1\\3\\5\\7\end{pmatrix}, \vec{v}_4\begin{pmatrix}0\\2\\3\\\alpha\end{pmatrix}$$

2. Dans le cas où la famille est liée, déterminer les relations linéaires qui lient ces vecteurs.
   Quelle est la dimension du sous espace F de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille $\{ \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4} \}$?
   On le notera $F = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \mathbf{v_4}]$.

3. Soit le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ k \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ de IR^4. Déterminer les valeurs de k telles que $v \in F$ et exprimer $\mathbf{v}$ en fonction de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$.