Feuille d'Exercices 4

Fonctions réciproques

Les exercices avec $\star$sont facultatifs. On ne traitera pas toutes les questions dans les exercices composés de plussieurs questions similaires.

Exercice 4.1.— Soit f la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par

$$f(x) = \cos x + x$$

1. Montrer que f définit une bijection entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et un intervalle I que l'on précisera.

2. On note $g = f^{-1}$ la bijection réciproque de f. Quel est le sens de variation de g ?

3. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intérieur de I. Etudier ses dérivées à droite (ou à gauche) aux bornes de I.

4. Calculer $g(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$. En déduire un développement limité à l'ordre 2 de g au point 1. Vérifier le calcul en écrivant un développement limité de $g \circ f$ au point 0.

$\star$ **5.** Justifier l'existence et déterminer le DL d'ordre 4 de g en 1.

$\star$ **Exercice 4.2.—** Résoudre l'équation $x^y = y^x$ où x et y sont des entiers > 0.

Indication : se ramenr à étudier l'équation $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$ en supposant que $x < y$.

Exercice 4.3.— Simplifier les expressions suivantes puis dessiner le graphe de la fonction :

1. $f_1(x) = \arccos(\cos x)$ et $f_2(x) = \arccos(\sin x)$ pour $x \in [0, 4\pi]$;
2. $f_3(x) = \arctan(\tan 2x)$ pour $x \in [0, \pi]$.
3. $f_4(x) = \sin(\arccos x)$, $f_5(x) = \cos(\arcsin x)$, $f_6(x) = \sin(3 \arctan x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.4.— **1.** Montrer que $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x > 0$.

2. En déduire la limite

$$\lim_{x \to +\infty} x \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right).$$

3. Que se passe-t-il lorsque x est au voisinage de $-\infty$?

Indication : dériver l'expression du membre de gauche par rapport à x

Exercice 4.5.— **1.** En posant, pour a et b deux réels, $\theta = \arctan a$ et $\phi = \arctan b$ et développant $\tan(\theta + \phi)$, donner une formule plausble pour $\arctan a + \arctan b$.

2. En dérivant la fonction $f(x) = \arctan \frac{a+x}{1-ax}$, montrer que si $ab < 1$, alors

$$\arctan a + \arctan b = \arctan \frac{a+b}{1-ab}.$$

3. Que se passe t'il si $ab > 1$?

Exercice 4.6.— Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p. À quelle distance doit se placer un observateur (dont la taille est supposée négligeable) pour voir la statue sous un angle maximal ?

Indication : faire un dessin d'abord !

Exercice 4.7.— Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée (en précisant le domaine de validité du calcul). En déduire une nouvelle expression plus simple pour la fonction initiale et tracer son graphe.

$$f_1(x) = \arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \qquad f_2(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) \qquad f_3(x) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{x+2}}{2}\right)$$
$$f_4(x) = \arctan\frac{1}{x} \qquad f_5(x) = \arctan\tfrac{2x}{1-x^2} \qquad f_6(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Exercice 4.8.— Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1. $\arctan(2x) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$.
2. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$.
3. $\arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12}$.

Exercice 4.9.— Résoudre les équation suivantes :

$$\arcsin x = \arcsin\frac{2}{5} + \arcsin\frac{3}{5}, \quad \arccos x = 2\arccos\frac{3}{4},$$
$$\arctan x = 2\arctan\frac{1}{2}.$$

Exercice 4.10.— Calculer la limite en 0 de

$$\frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$$