Feuille d'Exercices 3

Développements limités et étude locale des fonctions

Exercice 3.1.— Donner les développements limités en 0 des fonctions
1. $f_1(x) = \ln^2(1+x)$ à l'ordre 4
2. $f_2(x) = \ln(1+x^2)\exp(x)$ à l'ordre 4
3. $f_3(x) = \ln(cosx)$ à l'ordre 6
4. $f_4(x) = \tan(x)$ à l'ordre 4
5. $f_5(x) = \sin\tan x$ à l'ordre 4
6. $f_6(x) = \exp\sin x$ à l'ordre 3
7. $f_7(x) = \exp\frac{1}{1+x}$ à l'ordre 3

On pourra, si le temps le permet, donner deux méthodes de calcul, l'une basée sur des calculs directs de DL, l'autre sur des applications de la formule de Taylor-Young.

Exercice 3.2.— Calculer les limites des fonctions suivantes lorsque x tend vers 0.
$$\frac{\sin x - x}{x\ln(1-x^2)}, \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}, \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}, \frac{\sin 2x - 2\sin x}{2\ln(1+x) - 2x - x^2}, \frac{e^x - (x+\cos x)}{x^2}, \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}} - \sin x}{2x + e^{-x} - e^x}.$$

Exercice 3.3.— Soit b la fonction définie par
$$b(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

1. Soit n un entier quelconque . Donner le développement limité de b en 0 à l'ordre n. On pourra commencer par examiner les cas $n = 1$, $n = 2$, etc..
2. La fonction b est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$, deux fois dérivable ? n fois dérivable ? Quelle est la valeur de $b^{(n)}(0)$?

Exercice 3.4.— Etudier la position du graphe de $f(x) = \ln(1+x+x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et sa tangente en 1.

$\star$ **Exercice 3.5.**— **1.** Montrer que si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ de dérivée seconde positive en tout point alors le graphe de la fonction f est **globalement** au dessus de n'importe laquelle de ses tangentes.
(Indication : écrire une formule de Taylor Lagrange au point considéré)
2. Que dire de la réciproque ?
3. Donner deux exemples significatifs de fonctions ayant cette propriété.
4. Une fonction polynômiale de degré 3 peut-elle avoir cette propriété ?

Exercice 3.6.— Déterminer la tangente en 0 au graphe de la fonction $f(x) = (\sin x)^2 - \frac{x^2}{1+x^2}$ et, localement, la position du graphe par rapport à cette tangente.

Exercice 3.7.— Déterminer la tangente en 1 au graphe de la fonction $g(x) = \sqrt{3x} - \sqrt{2+x}$ et, localement, la position du graphe par rapport à cette tangente.

Exercice 3.8.— Soit $f(x) = \dfrac{\cos x}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$.
Quel est le domaine de définition de f ? Montrer que f se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable en 0.
Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position du graphe par rapport à cette tangente.

Exercice 3.9.— Soit $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 \ln x}{x^2+1}$. Donner le domaine de définition de f et étudier les branches infinies de f.
(Indication : cela revient à étudier la fonction $g(y) = f(\frac{1}{y})$ au voisinage droit de 0).

Exercice 3.10.— Soit $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2-1}$. Déterminer si le graphe de f a des asymptotes et déterminer la position du graphe par rapport à ces asymptotes.

Exercice 3.11.— Soit $f(x) = (x+1)\exp(\frac{1}{x-1})$. Déterminer si le graphe de f a des asymptotes et la position du graphe de f par rapport à ces asymptotes.