Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1

Calculer à l'aide de comparaisons de croissance les limites des suites suivantes :

(i) $\frac{n^2}{2^n}$;

(ii) $n \sin \frac{1}{n}$;

(iii) $\ln(\frac{\ln \ln n}{n^\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$;

(iv) $n^{2007} e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 2

(i) Rappeler l'expression de la somme des termes d'une suite géométrique : $u_0 + u_0 q + \cdots + u_0 q^n = \ldots$.

(ii) Pour quelles valeurs de u_0 et q cette expression a-t-elle une limite ?

(iii) Application : donner les valeurs exactes (sous forme de fraction) des nombres suivants :
$0,142857142857\ldots$; $0,567567567\ldots$; $0,999999\ldots$.

Exercice 3

(i) Soit $u_n = n \cos \frac{1}{n} - \sqrt{n^2 - 1}$. Calculer la limite de u_n.

(ii) Montrer que $u_n \sim a n^k$, pour un $a \neq 0$ et un entier k que l'on déterminera.

Exercice 4

Calculer à l'aide de développements limités les limites des suites suivantes (en fonction des éventuels paramètres) :

(i) $n(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1)$;

(ii) $n \ln \frac{n+1}{n}$;

(iii) $(1 + \frac{a}{n})^n$;

(iv) $n^2 - \frac{1}{\sin^2 \frac{1}{n}}$.

Exercice 5

Donner des équivalents (à l'aide de développements limités) des suites suivantes :

(i) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

(ii) $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(n))$;

(iii) $\frac{1}{(n+1)^3} - \frac{1}{n^3}$;

(iv) $\ln(\sqrt{1+n^2} + n)$;

(v) $\ln(\sqrt{1+n^2} - n)$;

(vi) $(\frac{\sin n}{n})^n$;

(vii) $\cos(\frac{1}{n}) - \frac{1}{4}\cos(\frac{2}{n}) - \frac{3}{4}$.

Exercice 6

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Bien sûr, il faut tout justifier !

(i) $n + 1 \sim n$;

(ii) $2^{n+1} \sim 2^n$;

(iii) $n + \sqrt{n} = O(n)$;

(iv) $2^{n+\sqrt{n}} = O(2^n)$;

(v) $2^{n+(-1)^n\sqrt{n}} = O(2^n)$;

(vi) $2^{\sqrt{n}} = o(2^n)$;

(vii) $e^n = o(n!)$;

(viii) $n! = O(n^n)$;

(ix) $\frac{n^2}{\sin n} = O(n^2)$.

Exercice 7

(i) Montrer que, pour tout n, $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$ (on pourra utiliser l'intégrale de $\frac{dx}{x}$ entre des bornes bien choisies).

(ii) On définit la suite (u_n) pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n}$. La suite (u_n) est-elle monotone ? bornée ? Que dire de sa limite ?

(iii) On définit deux suites (v_n) et (w_n) par : $v_n = u_n - \ln n$, et $w_n = v_n - \frac{1}{n}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

(iv) En déduire qu'il existe une constante γ telle que l'on puisse écrire : $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice 8

(i) Notons $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$. Montrer que u_n a une limite (on pourra comparer à $\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t^{3/2}}$). Notons ℓ cette limite.

(ii) Donner un développement limité de $\displaystyle\int_0^x \frac{du}{u^2}\sqrt{\frac{u^3}{1+u^3}}$.

(iii) Donner un équivalent de $\ell - u_n$, en utilisant, par exemple, le changement de variable $t = \frac{1}{u}$.

Exercice 9

Étudier la suite $\displaystyle\int_n^{2n} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^3+1}}$ (on pourra s'inspirer de l'exercice précédent, et encadrer l'intégrande via un développement asymptotique).

Exercice 10

(i) On note $f_n(x) = x^n - x - n$. Montrer que, pour tout n, il existe un unique réel positif x_n tel que $f_n(x_n) = 0$.

(ii) Soit a un réel positif. Donner (en fonction de a) la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = f_n(a)$.

(iii) En déduire que la suite (x_n) a une limite, et donner cette limite.

(iv) Montrer que, pour tout n, $x_n \leqslant \frac{n}{n-1}$.