Feuille d'Exercices 2

Equations différentielles

Exercice 1

Résoudre les équations à variables séparables suivantes :

1. $y' = -\dfrac{y}{x}$.

2. $y' = \dfrac{1-y}{1+x}$.

3. $y' \cos(2y) - \sin y = 0$.

4. $y' = e^{x+y}$.

5. $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle suivante : (E) $(1+x^2)\,y' + x^n y = f(x)$.

1. Intégrer l'équation (E) dans le cas où $n = 1$ et f est la fonction nulle.
Déterminer l'intégrale particulière qui prend la valeur 1 pour $x = 0$.

2. Calculer les primitives des fonctions suivantes : $\varphi_1(x) = \dfrac{1}{x(x^2+1)}$, $\varphi_2(x) = \dfrac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

3. Intégrer l'équation (E) dans le cas où $n = -1$ et $f(x) = x^2$ et démontrer que l'intégrale
générale peut être mise sous la forme $y = \dfrac{1}{x}\left(x^2 + 2 + k\sqrt{1+x^2}\right)$.

Exercice 3

Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' - \dfrac{ny}{x+1} = \dfrac{x^3(x+1)^n}{\sqrt{x^2-1}}$.

Exercice 4

1. Résoudre l'équation différentielle suivante : (E) $2xy' - y = \dfrac{1}{x+1}$.

On distinguera 3 cas : $x \in]-\infty, -1[$, $x \in]-1, 0[$, $x \in]0, +\infty[$.

2. Existe-t'il une solution de (E) sur $\mathbb{R}$?

3. Existe-t'il une solution de (E) sur $]-1, +\infty[$?

Exercice 5

Intégrer les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + 2y' + y = x + 1$.
2. $y'' + 2y' = x + 1$.
3. $y'' + 2y' = e^{x}$.
4. $y'' + 2y' + y = e^{x}$.

Exercice 6

Intégrer les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y = x \sin x$.

2. $y'' - 5y' + 4y = 2e^{4x} + (34x + 18) \cos x$.

3. $y'' - 4y' + 5y = x \cos x \, e^{2x}$.
Trouver la solution particulière telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.

4. $(x + 1)^2 y'' - (4x^2 + 8x + 4) y = (x^3 + x^2 - x - 1) e^{-2x}$.

Exercice 7

1. Résoudre l'équation différentielle suivante : $(e^{x} - 1) y' - (2e^{x} - 1) y = - e^{2x}$ (1).

2. Montrer que toutes les courbes correspondantes passent par un point fixe A que l'on déterminera.

3. Résoudre l'équation différentielle suivante : $y'' - 3y' + 2y = 0$ (2).

4. Montrer sans utiliser leur expression trouvée au **1** que toutes les solutions de (1) sont solutions de (2).
Indication : On pourra dériver (1).