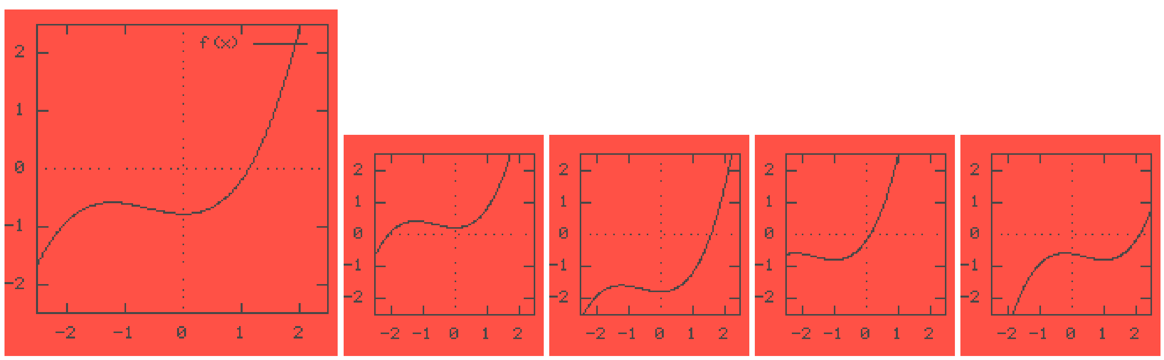
Université de Paris XI **L1 – Calculus**
Mathématiques **1er semestre 05/06**

Feuille d'Exercices 1

Fonctions – Limites – Continuité

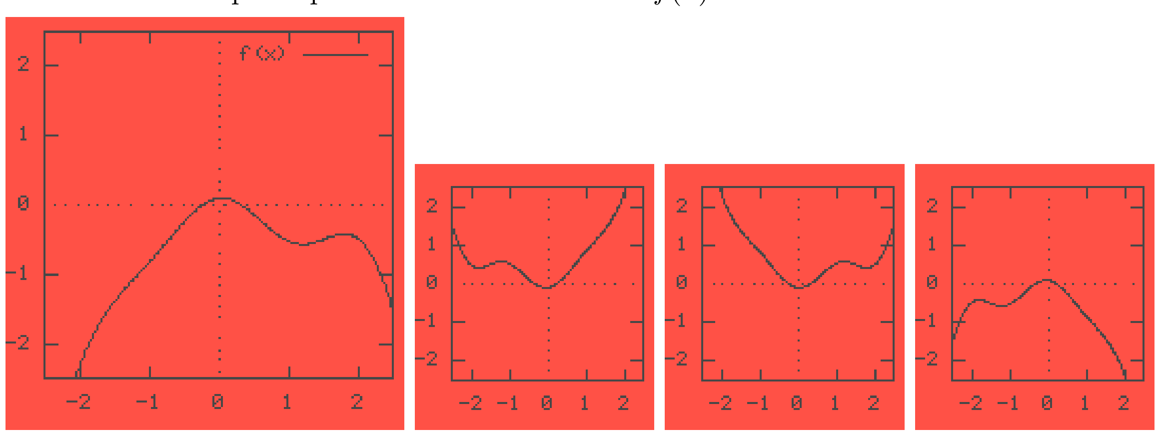
*Les exercices avec * sont destinés au travail personnel.*

Exercice 1.1.— (Cet exercice est extrait de l'exercice "Fonctions Graphiques" de WIMS.) Le premier dessin représente le graphe d'une fonction f. Parmi les quatre dessins suivants lequel représente la fonction $x \mapsto f(x) - 1$?



Même question pour les fonctions $x \mapsto f(x) + 1$, $x \mapsto f(x + 1)$, $x \mapsto f(x - 1)$.

*__Exercice 1.2.—__ Le premier dessin représente le graphe d'une fonction f. Parmi les quatre dessins suivants lequel représente la fonction $x \mapsto -f(x)$?



Même question pour les fonctions $x \mapsto f(-x)$, $x \mapsto -f(-x)$.

Exercice 1.3.— Soit a et b deux réels, et f la fonction donnée par $f(x) = ax + b$. On travaille dans uin repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Quelle est l'équation du graphe de f ? De quelle sorte de courbe s'agit-il ?
2. Déterminer l'equation de l'image de cette courbe par la symétrie d'axe Ox, puis par la symétrie d'axe Oy, et enfin par la symétrie de centre O.

3. Pour chacune des courbes obtenues, donner une fonction dont elle est le graphe. Pouvez-vous exprimer ces fonctions à l'aide de f ?
4. Déterminer l'equation de l'image du graphe de f par la symétrie d'axe $y = x$. A quelle condition la courbe obtenue est-elle le graphe d'une fonction ?

Exercice 1.4.— Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes

$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}, \qquad g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 5}, \qquad h(x) = \ln(4x+3).$$

Exercice 1.5.— Etudier les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x}, \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 1.6.— Déterminer les limites des fonctions suivantes au(x) point(s) indiqué(s)

1. $\frac{2x^3-3x^2+1}{-4x^3+3x+1}$ en $+\infty$, en $x_0 = 1$.
2. $(3x^4 - 2x^2)e^{-x}$ en $+\infty$
3. $(3x^2 - 2x)e^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty$
4. $(3x^2 - 2x)e^{-2\ln x}$ en $+\infty$
5. $\frac{2x+3}{3x^4+2}e^{x}$ en $+\infty$
6. $\frac{2x+3}{3x^4+2}e^{\ln x}$ en $+\infty$
7. $\sqrt{x}\ln(x^2+2x)$ en $x_0 = 0$, en $+\infty$
8. $\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(x^2+2x)$ en $x_0 = 0$, en $+\infty$

Exercice 1.7.— Pour chacune des formules suivantes, décrire le domaine D de définition naturel de la fonction définie par cette formule. Détailler les compositions et opérations algébriques en jeu pour affirmer la continuité de la fonction sur le domaine D.

1. $f(x) = \sqrt{x^3 - 3}$
2. $g(x) = \ln(x-1)^2(x+2)^4$
3. $\ln(\sqrt{x^2+1} - 2)$

***Exercice 1.8.**— Soit f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|) \text{ et } g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Donner une formule pour $f \circ g$, une pour $g \circ f$. Sur quels ensembles ces fonctions sont-elles continues ?

Exercice 1.9.— Peut-on prolonger par continuité à tout $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}^*$:

$$f_1 : x \mapsto 2x + \frac{\sqrt{9x^2}}{x}, \quad f_2 : x \mapsto \sin(x)\log(|x|), \quad f_3 : x \mapsto \frac{e^x}{x}, \quad f_4 : x \mapsto \frac{(1+x^3)-1}{x}.$$

Exercice 1.10.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 0, \\ 2+x & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue ?
2. Donner l'image par f de chacun des intervalles suivants : $[-2,-1]$, $[0,+\infty[$, $[-1,1]$.

Exercice 1.11.— Donner un exemple de fonction f (éventuellement par son graphe) continue sur $[0,1]$, telle que $f(0)f(1) < 0$ et telle que l'équation $f(x) = 0$ ait

1. une racine et une seule en $x = \frac{1}{2}$.
2. exactement deux racines distinctes.
3. une infinité de racines.

Exercice 1.12.— Montrer que les équations suivantes ont au moins une racine dans l'intervalle $\mathcal{I}$ indiqué :

1. $x^7 - x^2 + 1 = 0$ sur $\mathcal{I} = [-2,0]$.
2. $\sqrt[3]{x^3+6x+1} - 3x = 2$ sur $\mathcal{I} = \mathbb{R}$.
3. $\tan x = \dfrac{3}{2}x$ sur $\mathcal{I} =]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}[$.

On pourra donner une valeur approchée de l'une de ces racines en utilisant la méthode de la dichotomie (à l'aide du moyen de calcul de son choix !).

Exercice 1.13.— On se donne une fonction polynômiale $p(x) = c_0 + c_1.x + \cdots + c_k.x^k$. Montrer que si $c_0.c_k < 0$ alors cette fonction s'annule au moins une fois.
L'affirmation réciproque est-elle vraie ?

Exercice 1.14.—

1. Montrer que l'équation $\cos x = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une solution dans l'intervalle $[0,1]$.

2. Montrer que plus généralement, si $f : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction continue alors l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet au moins une solution.

3. * Donner des exemples de fonctions f comme dans le point précédent telles que
   (i) l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet exactement une solution.
   (ii) l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet exactement deux solutions.

(iii) l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0, 1]$ admet une infinité de solutions.

Exercice 1.15.— On considère un cycliste qui parcourt 90km en 4 heures.

1. Est-il raisonnable de considérer que la fonction d donnant la distance parcourue jusqu'à un instant t est continue ?

2. Montrer qu'il existe un intervalle de deux heures pendant son trajet durant lequel il a parcouru exactement 45km.

3. Montrer que si 3 points sont dans un intervalle I, alors leur moyenne est aussi dans I. Qu'en est-il pour 4 points ?, pour n points ?

4. Montrer qu'il existe un intervalle de 80mn pendant le trajet du cycliste durant lequel il a parcouru exactement 30km.

5. Généralisation ?

*__Exercice 1.16.__—

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, montrer que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ alors $f^{-1}(I) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \in I\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. On pourra utiliser la caractérisation des intervalles vue dans la preuve de l'une des versions du théorème des valeurs intermédiaires.
2. Donner des exemples d'intervalles et de fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$ tels que l'intervalle I soit d'un certain "type" et l'intervalle $f^{-1}(I)$ soit d'un "autre type".