Université Paris-Sud — 2005-2006
S1 IFIPS — Compléments de Mathématiques

CONTRÔLE CONTINU DE MATHÉMATIQUES
7 novembre 2005, durée 2h
Documents et calculettes interdits
Barême indicatif : I=4, II=3, III=2, IV=4, V=7

I

1. Ecrire la contraposée de l'implication suivante et démontrer qu'elle est vraie pour tout x réel non nul.

$$(\frac{1}{x^2} < 4) \Rightarrow ((x > \frac{1}{2}) \text{ ou } (x < -\frac{1}{2})).$$

2. Quelle est la réciproque de l'assertion précédente ? Est-elle vraie pour tout x réel non nul ? Si oui, la démontrer. Si non, donner un contre exemple.

II

Soit E l'ensemble des étudiants de S1-IFIPS. On note $T \subset E \times E$ l'ensemble des couples (x, y) tels que x *connaît le numéro de téléphone de* y. On rappelle que E est divisé en 3 groupes de TD notés G_1, G_3 et G_4.

Ecrire sous forme de formule mathématique les assertions suivantes.

1. Il y a un groupe de TD dans lequel tout étudiant connaît le numéro de téléphone d'au moins un étudiant d'un autre groupe.
2. Dans chaque groupe de TD on peut trouver un étudiant qui peut appeler tous les autres étudiants de son TD.
3. La négation de l'assertion précédente.

III

1. Sachant que le premier nombre impair est 1, quel est le quatrième nombre impair ? Quel est le n-ème nombre impair ?

2. Pour n entier naturel, on note u_n la somme des n premiers nombres impairs. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = n^2$.

IV

Soit E l'ensemble des étudiants de S1-IFIPS. On considère 3 sous-ensembles de E. T est l'ensemble des étudiants qui possèdent un téléphone portable, U l'ensemble de ceux qui habitent en résidence universitaire, P l'ensemble de ceux qui ont le permis de conduire. On utilisera la notation $\bar{X}$ pour le complémentaire dans E d'une partie X de E.

1. On considère l'ensemble A des étudiants qui habitent en résidence universitaire ou possèdent un téléphone portable, mais qui n'ont pas le permis de conduire. Ecrire A comme la différence de deux parties de E. Ecrire une formule (ne faisant intervenir que $\cap$, $\cup$ et le complémentaire) qui définit A.

2. Soit B l'ensemble des étudiants qui habitent en résidence universitaire mais n'ont pas le permis de conduire. Soit C l'ensemble des étudiants qui possèdent un téléphone portable mais n'ont pas le permis de conduire. Montrer que $A = B \cup C$.

3. Démontrer plus généralement que si T, U et P sont trois sous-ensembles d'un ensemble E, alors $(T \cup U) \setminus P = (T \setminus P) \cup (U \setminus P)$ (on pourra utiliser une propriété de $\cup$ et $\cap$).

V

Au cours d'une interminable partie de Monopoly, les 5 joueurs ont fait le point de leurs propriétés, des maisons qu'ils ont construites sur lesdites propriétés, et de leur fortune en argent liquide. Un hotel compte pour 5 maisons. Cela a donné les tableaux suivants. Les lignes 12 à 17 du premier tableau ont été malencontreusement perdues.

N^0	Adresse	Propriétaire	Maisons
1	Rue de Belleville	Albert	5
2	Rue Lecourbe	Albert	5
3	Rue de Vaugirard	Bernard	4
4	Rue de Courcelles	Bernard	4
5	Avenue de la République	Bernard	3
6	Bd de la Villette	Albert	4
7	Avenue de Neuilly	Albert	4
8	Rue de Paradis	Albert	5
9	Bd St Michel	Bernard	0
10	Avenue Mozart	Claude	0
11	Place Pigalle	Didier	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
18	Avenue de Breteuil	Didier	4
19	Avenue Foch	Didier	4
20	Bd des Capucines	Didier	5
21	Av. des Champs Elysées	Claude	2
22	Rue de la Paix	Claude	1

N^0	Nom	Fortune
1	Albert	15
2	Bernard	10
3	Claude	11
4	Didier	12
5	Etienne	10

On note A l'ensemble des adresses, J celui des joueurs, $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ celui des valeurs prises par le nombre de maisons. On note $m : A \to X$ l'application qui donne le nombre de maisons construites à telle adresse, $p : A \to J$ l'application qui donne le propriétaire d'une adresse, et $f : J \to \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ l'application qui donne la fortune d'un joueur.

1. L'application f est-elle injective ? surjective ? L'application m est-elle injective ? surjective ?

2. Soit E l'ensemble des propriétés d'Etienne. Soit A' l'ensemble des 11 premières adresses. Soit P l'ensemble des propriétaires apparaissant dans la première moitié du premier tableau. Décrire E et P comme des images ou des images réciproques.

3. Sachant que la restriction de m à E est surjective, peut-on déduire qui est propriétaire des adresses 12 à 17 ?

4. Montrer que la restriction de f à P est injective.

Corrigé du contrôle continu de Mathématiques

I

1. Contraposée.

$$(\forall x \in \mathbf{R}^*)(((x \leq \frac{1}{2}) \text{ et } (x \geq -\frac{1}{2})) \Rightarrow (\frac{1}{x^2} \geq 4)).$$

Démonstration. Si $x \leq \frac{1}{2}$ et $x \geq -\frac{1}{2}$), alors $|x| \leq \frac{1}{2}$. On peut élever au carré les deux membres de cette inégalité entre nombres positifs, donc

$$x^2 = |x|^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Enfin, on peut prendre l'inverse des deux membres de cette inégalité entre nombres positifs, à condition de changer le signe de l'inégalité, et on conclut que $\frac{1}{x^2} \geq 4$.

2. La réciproque est

$$(\forall x \in \mathbf{R}^*)(((x > \frac{1}{2}) \text{ ou } (x < -\frac{1}{2})) \Rightarrow (\frac{1}{x^2} < 4)).$$

Elle est vraie. En effet, il y a deux cas.
- Si $x > \frac{1}{2}$, on peut élever au carré et prendre l'inverse de cette inégalité entre réels strictement positifs, et on obtient $x^2 > \frac{1}{4}$ puis $\frac{1}{x^2} < 4$.
- Si $x < -\frac{1}{2}$, alors $-x > \frac{1}{2}$ et on est ramené au cas précédent. Il vient $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{(-x)^2} < 4$.

II

1. $(\exists i \in \{1,3,4\})\ (\forall x \in G_i)\ (\exists j \neq i)\ (\exists y \in G_j)\ ((x,y) \in T)$.
2. $(\forall i \in \{1,3,4\})\ (\exists x \in G_i)\ (\forall y \in G_i)\ ((x,y) \in T)$.
3. $(\exists i \in \{1,3,4\})\ (\forall x \in G_i)\ (\exists y \in G_i)\ ((x,y) \notin T)$.

III

1. Le quatrième nombre impair, c'est 7. Le n-ème, c'est $2n - 1$.

2. Notons $\mathcal{P}(n)$ l'assertion $u_n = n^2$.

Remarquons qu'une somme vide vaut 0, donc $u_0 = 0 = 0^2$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons l'assertion $\mathcal{P}(n)$ vraie. Le $n+1$-ème entier impair est $2n+1$. Par conséquent, $u_{n+1} = u_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On conclut que l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

IV

1. $A = (U \cup T) \setminus P = \bar{P} \cap (U \cup T)$.

2. Si un étudiant x appartient à B, alors x habite en résidence universitaire mais n'a pas le permis de conduire, donc il appartient à A. Si $x \in C$, x possède un téléphone portable mais n'a pas le permis de conduire, donc $x \in A$. Cela montre que $B \cup C \subset A$.

Réciproquement, soit x un étudiant qui n'appartient pas à $B \cup C$. Alors x n'appartient ni a B, ni à C. S'il a le permis de conduire, il n'appartient pas à A. Sinon, il n'habite pas en résidence universitaire et il ne possède pas de téléphone portable, donc il n'appartient pas non plus à A. Cela montre que $A \subset B \cup C$.

On conclut que $B \cup C = A$.

3. On peut ou bien démontrer deux inclusions réciproques, comme en 2, ou utiliser une règle, la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion.

$$\begin{aligned}
(T \cup U) \setminus P &= (T \cup U) \cap \bar{P} \\
&= (T \cap \bar{P}) \cup (U \cap \bar{P}) \\
&= (T \setminus P) \cup (U \setminus P).
\end{aligned}$$

V

1. f n'est pas injective car $f(\text{Bernard}) = f(\text{Etienne}) = 10$.

f n'est pas surjective car aucun des joueur n'a une fortune égale à 13.

m n'est pas injective, car $m(\text{Rue de Belleville}) = m(\text{Rue Lecourbe}) = 5$.

m est surjective, car $m(\text{Place Pigalle}) = 0$, $m(\text{Rue de la Paix}) = 1$, $m(\text{Avenue des Champs Elysées}) = 2$, $m(\text{Avenue de la République}) = 3$, $m(\text{Rue de Vaugirard}) = 4$ et $m(\text{Rue Lecourbe}) = 5$.

2. $E = p^{-1}(\{\text{Etienne}\})$. En effet, une propriété $a \in A$ est dans E si et seulement si $p(a) = \text{Etienne}$.

$P = p(A')$ où A' est l'ensemble des 11 premières adresses. En effet, un joueur $j \in J$ est dans P si et seulement si il est propriétaire de l'une des propriétés parmi les 11 premières, i.e. si et seulement si il existe $a \in A'$ tel que $j = p(a')$.

3. Oui, c'est Etienne. En effet, si $m_{|E} : E \to X$ est surjective, alors E a au moins 6 éléments. Or E est contenu dans le sous-ensemble des adresses numéro 12 à 17, qui a exactement 6 éléments. Par conséquent, E est égal à cet ensemble, donc Etienne possède toutes les adresses de 12 à 17.

4. $P = \{\text{Albert, Bernard, Claude, Didier}\}$, et f prend sur ces 4 joueurs des valeurs distinctes 15, 10, 11 et 12, donc $f_{|P}$ est injective.

Barême

I.1. sur 2 (1=contraposée, 1=démonstration).
I.2. sur 3 (1=réciproque, 2=démonstration (2 cas)).

II sur 3 (1 par formule).

III.1. sur 0.5.
III.2. sur 2.

IV.1. sur 1.
IV.2. sur 2 (1 par inclusion).
IV.3. sur 1.5.

V.1. sur 4 (1 par réponse justifiée).
V.2. sur 2.
V.3. sur 2.
V.4. sur 1.

Total sur 24.

En cas de doute appeler Pansu le soir au 01 69 07 10 68.
Notes à rendre à Pansu avant le jeudi 10 novembre.