Université Paris-Sud
S1 IFIPS

2005-2006
Compléments de Mathématiques

Contrôle continu de Mathématiques, 2ème essai

3 décembre 2005

I

1. L'assertion suivante est-elle vraie ? Si oui, la démontrer. Si non, donner un contre exemple.

$$(\forall x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})(\exists z \in \mathbf{R})(x = y^2 - z^2).$$

2. Ecrire la contraposée de l'implication suivante et démontrer qu'elle est vraie pour tout x réel.

$$(\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{2}) \Rightarrow ((x > 1) \text{ ou } (x < -1)).$$

3. Quelle est la réciproque de l'assertion précédente ?

II

Soit E l'ensemble des étudiants de S1-IFIPS. On note $T \subset E \times E$ l'ensemble des couples (x, y) tels que *x connaît le numéro de téléphone de y*. On rappelle que E est divisé en 3 groupes de TD notés G_1, G_3 et G_4.

Ecrire sous forme de formule mathématique les assertions suivantes.

1. Il y a un étudiant qui peut être appelé par tous les étudiants de l'un des groupes.
2. La négation de l'assertion précédente.

III

Soit E l'ensemble des étudiants de S1-IFIPS. On considère 3 sous-ensembles de E. T est l'ensemble des étudiants qui possèdent un téléphone portable, U l'ensemble de ceux qui habitent en résidence universitaire, P l'ensemble de ceux qui ont le permis de conduire. On utilisera la notation $\bar{X}$ pour le complémentaire dans E d'une partie X de E.

1. On considère l'ensemble A des étudiants qui habitent en résidence universitaire et ne possèdent pas de téléphone portable, ou qui n'ont pas le permis de conduire. Ecrire une formule (ne faisant intervenir que $\cap$, $\cup$ et le complémentaire) qui définit A.

2. Soit B l'ensemble des étudiants qui habitent en résidence universitaire ou n'ont pas le permis de conduire. Soit C l'ensemble des étudiants qui ne possèdent pas de téléphone portable ou n'ont pas le permis de conduire. Exprimer A en fonction de B et C.

IV

Au cours d'une interminable partie de Monopoly, les 5 joueuses ont fait le point de leurs propriétés, des maisons qu'ils ont construites sur lesdites propriétés, et de leur fortune en argent liquide. Un hotel compte pour 5 maisons. Cela a donné les tableaux suivants. Les lignes 12 à 17 du premier tableau ont été malencontreusement perdues.

N^0	Adresse	Propriétaire	Maisons
1	Rue de Belleville	Adèle	5
2	Rue Lecourbe	Adèle	5
3	Rue de Vaugirard	Béatrice	4
4	Rue de Courcelles	Béatrice	4
5	Avenue de la République	Béatrice	4
6	Bd de la Villette	Adèle	4
7	Avenue de Neuilly	Adèle	4
8	Rue de Paradis	Adèle	5
9	Bd St Michel	Béatrice	0
10	Avenue Mozart	Chloé	0
11	Place Pigalle	Chloé	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
18	Avenue de Breteuil	Delphine	2
19	Avenue Foch	Delphine	1
20	Bd des Capucines	Delphine	2
21	Av. des Champs Elysées	Chloé	2
22	Rue de la Paix	Chloé	1

N^0	Nom	Fortune
1	Adèle	15
2	Béatrice	14
3	Chloé	11
4	Delphine	12
5	Elodie	13

On note A l'ensemble des adresses, J celui des joueuses, $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ celui des valeurs prises par le nombre de maisons. On note $m : A \to X$ l'application qui donne le nombre de maisons construites à telle adresse, $p : A \to J$ l'application qui donne le propriétaire d'une adresse, et $f : J \to Y = \{11, 12, 13, 14, 15\}$ l'application qui donne la fortune d'une joueuse.

1. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ? L'application m est-elle injective ? surjective ? bijective ? Quand l'information manque pour conclure, le signaler.

2. Soit CD l'ensemble des adresses appartenant à Chloé ou à Delphine. Soit P l'ensemble des propriétaires apparaissant dans la deuxième partie du premier tableau. Décrire CD et P comme des images ou des images réciproques.

3. Sachant que la restriction de m à CD est surjective, peut-on déduire que Chloé possède un hotel ? Si oui, le démontrer. Si non, donner un contre exemple.

4. La restriction de f à P est-elle surjective ?

Université Paris-Sud
S1 IFIPS

2005-2006
Compléments de Mathématiques

Corrigé du contrôle continu de Mathématiques, 2ème essai

3 décembre 2005

I

1. Oui. Si $x \geq 0$, on prend $y = \sqrt{x}$ et $z = 0$. Si $x < 0$, on prend $y = 0$ et $z = \sqrt{-x}$.

2. La contraposée est

$$((x \leq 1) \text{ et } (x \geq -1)) \Rightarrow (\frac{1}{1+x^2} \geq \frac{1}{2}).$$

Elle est vraie. En effet, si $(x \leq 1)$ et $(x \geq -1)$, alors $|x| \leq 1$. On peut élever au carré les deux membres de cette inégalité entre nombres positifs, il vient $x^2 = |x|^2 \leq 1$, d'où $1 + x^2 \leq 2$. On peut prendre l'inverse les deux membres de cette inégalité entre réels strictement positifs, et on conclut que $\dfrac{1}{1+x^2} \geq \dfrac{1}{2}$.

3. La réciproque est

$$((x > 1) \text{ ou } (x < -1)) \Rightarrow (\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{2}).$$

II

$$\begin{array}{ll} 1. & (\exists x \in E)(\exists i \in \{1,3,4\})(\forall y \in G_i)((y,x) \in T), \\ 2. & (\forall x \in E)(\forall i \in \{1,3,4\})(\exists y \in G_i)((y,x) \notin T). \end{array}$$

III

1. $A = (U \cap \bar{T}) \cup \bar{P}$.

2. L'énoncé signifie $B = U \cup \bar{P}$, $C = \bar{T} \cup \bar{P}$. D'après la distributivité de la réunion par rapport à l'intersection,

$$\begin{aligned} A &= (U \cap \bar{T}) \cup \bar{P} \\ &= (U \cup \bar{P}) \cap (\bar{T} \cup \bar{P}) \\ &= B \cap C. \end{aligned}$$

IV

1.

- f est injective. En effet, les valeurs prises par f sur les 5 joueuses sont distinctes.
- f est surjective. En effet, chacun des nombres de 11 à 15, i.e. des éléments de Y, est l'image par f d'au moins un élément de J.
- f est bijective, car elle est injective et surjective.
- m n'est pas injective. En effet, les adresses Rue de Vaugirard et Rue de Courcelles ont le même nombre de maisons.
- On ne peut pas décider si m est surjective ou non. En effet, la partie visible du tableau ne comporte pas d'adresse à 3 maisons, il est possible qu'une telle adresse existe (ou non) dans la partie perdue. Par exemple, voici deux possibilités pour la partie perdue du tableau, la première rend m surjective, la seconde non.

N^0	Adresse	Propriétaire	Maisons
12	Avenue Matignon	Delphine	4
13	Avenue Malesherbe	Delphine	4
14	Avenue Henri-Martin	Delphine	5
15	Rue du Faubourg St Honoré	Chloé	2
16	Place de la Bourse	Chloé	2
17	Rue Lafayette	Chloé	3

N^0	Adresse	Propriétaire	Maisons
12	Avenue Matignon	Delphine	4
13	Avenue Malesherbe	Delphine	4
14	Avenue Henri-Martin	Delphine	5
15	Rue du Faubourg St Honoré	Chloé	2
16	Place de la Bourse	Chloé	2
17	Rue Lafayette	Chloé	2

- m n'est pas bijective, puisqu'elle n'est pas injective.

2. $CD = p^{-1}\{\text{Chloé,Delphine}\}$, $P = p(A'')$, où $A'' \subset A$ est l'ensemble des adresses 18 à 22. En fait, $P = p(CD)$ et $CD = p^{-1}(CD)$.

3. Non. On peut déduire que Chloé ou Delphine possède un hotel, mais pas que Chloé seule possède un hotel. Par exemple, la première possibilité ci-dessus pour la partie perdue du tableau rend la restriction de m à CD surjective, mais Chloé ne possède aucun hotel. Voici une troisième possibilité, qui rend la restriction de m à CD surjective, et pour laquelle Chloé possède un hotel.

N^0	Adresse	Propriétaire	Maisons
12	Avenue Matignon	Delphine	4
13	Avenue Malesherbe	Delphine	3
14	Avenue Henri-Martin	Delphine	4
15	Rue du Faubourg St Honoré	Chloé	4
16	Place de la Bourse	Chloé	4
17	Rue Lafayette	Chloé	5

4. La restriction de f à P n'est pas surjective. En effet, P n'a que 2 éléments, Chloé et Delphine, alors que l'ensemble d'arrivée Y de f en compte 5.

Barême

I.1. : 3
I.2. : 1.5 (contraposée =0.5, preuve=1)
I.3. : 0.5
II.1. : 3
II.2. : 1
III.1. : 1
III.2. : 2 (B, C=1, $A = B \cap C$=1)
IV.1. : 3 (chaque question sur 0.5)
IV.2. : 2 (CD=1, P=1)
IV.3. : 2 (conclusion=1, contre exemple=1)
IV.4. : 1