Université Paris-Sud
S5 IFIPS

2006-2007
Mathématiques : Analyse

Feuille d'exercices n^{0}6

Exercice 1 *Soit α une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$. Que vaut αIII ? En particulier, que vaut $(e^{2i\pi x}-1)III$?*

Exercice 2 *Montrer que* $\lim_{\epsilon\to 0}\ (\mathcal{D}')\ \frac{1}{x+i\epsilon} = vp(\frac{1}{x}) - i\pi\delta$.

Exercice 3 *Soit $x_0 \in \mathbf{R}$. Déterminer toutes les distributions T telles que $(x-x_0)T = 0$.*

Exercice 4

1. *Vérifier que la distribution III est paire et invariante par la translation τ_1.*
2. *Trouver une distribution paire P et une distribution impaire R telles que $H = P + R$.*

Exercice 5 *Calculer les dérivées des distributions suivantes : la fonction porte Π, $|x|$, $|x|^n$, αH où α est une fonction indéfiniment dérivable quelconque, $|\cos x|$.*

Exercice 6

1. *Vérifier que H et ses dérivées H' et H'' sont linéairement indépendantes, i.e. que si a, b, $c \in \mathbf{C}$ satisfont $aH + bH' + cH'' = 0$, alors $a = b = c = 0$.*
2. *Plus généralement, soit f une fonction indéfiniment dérivable, a, $b \in \mathbf{C}$. Montrer que si $fH = a\delta + b\delta'$, alors f s'annulle sur $[0, +\infty[$, $a = b = 0$.*

Exercice 7 *On appelle* partie finie de $1/x^2$ *la distribution définie comme suit :* $Pf(\frac{1}{x^2}) = -(vp(\frac{1}{x}))'$. *Montrer que* $x\,Pf(\frac{1}{x^2}) = vp(\frac{1}{x})$.

Exercice 8 *Montrer que la suite de fonctions définie par $f_\lambda(x) = \lambda e^{i\lambda x}$ converge vers 0 au sens des distributions lorsque λ tend vers $+\infty$.*

Exercice 9 *Soit $a > 0$.*

1. *Tracer la courbe représentative de la fonction f_a définie sur $\mathbf{R}$ par* $f_a(x) = \arctan(x/a)$.
2. *Pourquoi f_a définit elle une distribution régulière T_a ? Calculer* $\lim_{a\to 0}\ (\mathcal{D}')\ T_a$.
3. *Calculer* $\lim_{a\to 0}\ (\mathcal{D}')\ T'_a$.

Exercice 10 *Calculer les coefficients de Fourier de III_T et III'_T vues comme fonctions périodiques de période T.*

Exercice 11 *Soit f la fonction périodique de période T qui vaut $x - \frac{T}{2}$ sur $[0, T[$. En se ramenant à l'exercice 10 et sans nouveaux calculs, déterminer les coefficients de Fourier de f.*

Exercice 12 *Soit a un paramètre réel positif. On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$: $E'' + a^2E = \delta$, où l'inconnue E est une distribution. Chercher une solution particulière sous la forme $E = fH$ où f est indéfiniment dérivable.*

Exercice 13 *On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$: $\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} - 2x(t) = F(t)$ modélisant l'amplitude d'un oscillateur forcé par une force $F(t)$.*

1. Dans le cas où $F(t) = e^{-2t}$, montrer que $(\mathcal{E})$ admet une solution particulière de la forme $t \mapsto x_0(t) = ae^t + (bt + c)e^{-2t}$, où a, b, c sont des constantes que l'on déterminera, sachant qu'on impose les conditions initiales $x_0(0) = 0$ et $x'_0(0) = 1$. x_0 est elle dérivable ?

2. On veut déterminer la force f qu'il faut ajouter à F pour obtenir une solution $t \mapsto x_1(t)$ de $(\mathcal{E})$ qui soit identiquement nulle pour $t < 0$, et égale à $x_0(t)$ pour $t \geq 0$.

2.a. Exprimer x_1 au moyen de la fonction de Heaviside H.

2.b. Déterminer f. Est-ce une distribution régulière ?