Université Paris-Sud | 2006-2007
S5 IFIPS | Mathématiques : Analyse

Feuille d'exercices n^{0}5

Exercice 1 *La fonction ξ_a définie par*

$$\xi_a(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{a^2}{a^2-x^2}) & si\ |x| < a \\ 0 & si\ |x| \geq a \end{cases}$$

est pour $a > 0$ une fonction d'essai.

Exercice 2 *Si α est une fonction indéfiniment dérivable et si ϕ est une fonction de $\mathcal{D}$, alors leur produit $\alpha\phi$ est une fonction de $\mathcal{D}$.*

Exercice 3 *Soient f une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$, nulle en dehors d'un intervalle borné et ϕ une fonction de $\mathcal{D}$. Alors leur produit de convolution*

$$(f \star \phi)(x) = \int_{\mathbf{R}} f(t)\phi(x-t)\,dt$$

est une fonction de $\mathcal{D}$.

Exercice 4 *Soit ϕ une fonction de $\mathcal{D}$. Alors les fonctions translatée $\tau_a\phi$ et dilatée $d_\lambda\phi$ sont aussi dans $\mathcal{D}$. On rappelle que*

$$(\tau_a\phi)(x) = \phi(x-a)$$

où a est réel et que

$$(d_\lambda\phi)(x) = \phi(\frac{x}{\lambda})$$

où λ est un nombre réel différent de 0.

Exercice 5 *Vérifier que la distribution de Dirac δ n'est pas régulière.*

Exercice 6 *Montrer que si T_λ est la distribution associée à la fonction $x \mapsto \sin\lambda x$, on a*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\ (\mathcal{D}')\ T_\lambda = 0.$$

Exercice 7 *En admettant que l'on a pour $\lambda > 0$ (avec des notations incorrectes!)*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\ (\mathcal{D}')\ \frac{\sin\lambda x}{x} = \pi\delta,$$

donner une interprétation correcte de la formule des physiciens

$$\delta(x) = \int_{\mathbf{R}} e^{-2i\pi kx}\,dk.$$

Exercice 8

1. *Pour quelle raison l'expression $e^{i\lambda x}vp(\frac{1}{x})$ définit elle une distribution ?*
2. *Soit ψ une fonction d'essai. On rappelle la formule $\langle vp(\frac{1}{x}), \psi\rangle = \int_{-A}^{A} \frac{\psi(x)-\psi(0)}{x}\,dx$, où $[-A, A]$ est un intervalle en dehors duquel ψ est nul.*
   Soit ϕ une fonction d'essai. Posant $\phi(x) = \phi(0) + x\eta(x)$, exprimer $\langle e^{i\lambda x}vp(\frac{1}{x}), \phi\rangle$ comme la somme d'une expression ne dépendant que de $\phi(0)$ et d'une transformée de Fourier.
3. *En utilisant le théorème de Riemann-Lebesgue, calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} e^{i\lambda x}vp(\frac{1}{x})$.*