Université Paris-Sud
S5 IFIPS

2006-2007
Mathématiques : Analyse

FEUILLE D'EXERCICES N^{0}4

Exercice 1 1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbf{C}$ privé de 1 et 2 par $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 3z + 2}$. En utilisant la décomposition en éléments simples, montrer que f est la somme d'une série entière. Quel est son rayon de convergence ?*

2. *Soit g la fonction définie sur $\mathbf{C}$ privé de 0, 1 et 2 par $g(z) = \dfrac{1}{z^4 - 3z^3 + 2z^2}$. Montrer que g est la somme d'une série de Laurent. Quel est sa couronne de convergence ?*

Exercice 2 *Quelle est la dérivée de la fonction* arctan *? En déduire le développement en série entière de* arctan. *Quel est son rayon de convergence ?*

Exercice 3 *Montrer qu'il existe une unique série entière dont la somme f est solution de l'équation différentielle*

$$(\mathcal{E}) \quad (2 + z^2)f' + zf = 1,$$

et satisfait $f(0) = 1$. Quel est son rayon de convergence ?

Exercice 4 *Montrer que la fonction $z \mapsto f(z) = \sqrt{|xy|}$ possède des dérivées partielles au point $z = 0$ qui vérifient les conditions de Cauchy-Riemann, mais que f* n'est pas holomorphe *au voisinage de ce point.*

Exercice 5 *Déterminer la fonction holomorphe $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ de la variable complexe $z = x + iy$ telle que $Q(x, y) = (x \sin y - y \cos y)e^{-x}$.*

Exercice 6 *On rappelle qu'on note* log *la détermination du logarithme définie en dehors de l'axe réel positif, et telle que $\lim_{\epsilon \to 0} \log(x + i\epsilon) = \ell n(x)$. On se sert de cette détermination pour définir l'argument* $\arg(z) = \Im m(\log(z))$ *et la racine carrée* $\sqrt{z} = e^{\log(z)/2}$. *Déterminer les valeurs de* $\arg \sqrt{z-1}$ *pour $z = 1/2$ et de $1/\sqrt{z-1}$ pour $z = 0$.*

Exercice 7 *On définit une fonction notée $z \mapsto \arctan z$, pour $z \in \mathbf{C}$, $|z| < 1$, au moyen de la série entière trouvée à l'exercice 2. Quelle est la dérivée de la fonction $z \mapsto \arctan(iz)$? En déduire une expression de $\arctan(x)$, pour $x \in]-1, 1[$ utilisant la fonction* Log, *détermination du logarithme définie en dehors des réels négatifs, qui coïncide avec ℓn sur l'axe réel positif.*

Exercice 8 1. *Quel est le domaine d'holomorphie de la fonction $z \mapsto f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$?*

2. *Soit $\Gamma(r)$ le demi-cercle du demi plan $\{z \in \mathbf{C} \,|\, \Im m(z) > 0\}$ centré à l'origine, de rayon r, parcouru dans le sens trigonométrique. Calculer*

$$\lim_{r \to 0} \int_{\Gamma(r)} f(z)\, dz \quad \textit{et} \quad \lim_{R \to +\infty} \int_{\Gamma(R)} f(z)\, dz.$$

3. *En déduire la valeur de l'expression*

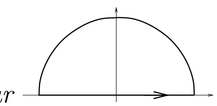
$$vp \int f(x)\, dx = \lim_{r \to 0,\, R \to +\infty} \int_{-R}^{-r} f(x)\, dx + \int_{r}^{R} f(x)\, dx.$$

Applications de la méthode des résidus

Exercice 9 *Calculer* $\displaystyle\int_C \frac{3z^2+2}{z(z+1)}\,dz$*, où* C *est un cercle de centre 0 et de rayon 3.*

Exercice 10 *On définit, pour* $z \in \mathbf{C}$, $\cos(z) = (e^{iz}+e^{-iz})/2$, $\sin(z) = (e^{iz}-e^{-iz})/2i$ *et* $\tan(z) = \sin(z)/\cos(z)$*. Calculer* $\displaystyle\int_{C_n} \tan(\pi z)\,dz$*, où* C_n *est un cercle de centre 0 et de rayon* $n \in \mathbf{N}$*.*

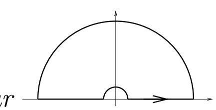
Exercice 11 *Calculer* $\displaystyle\int_{\to-\infty}^{\to+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$*, en utilisant le contour*



Exercice 12 *Soit* $a > 1$*. Calculer* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta}}{a-\cos\theta}\,d\theta$ *en identifiant cette intégrale à l'intégrale d'une fonction holomorphe sur un contour.*

Exercice 13 *Calculer* $\displaystyle\int_0^{\to+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ *en linéarisant* $\sin^2 x$ *et en s'inspirant de l'exercice 8.*

Exercice 14 *Soit* $a > 0$*. Calculer* $\displaystyle\int_{\to 0}^{\to+\infty} \frac{\ell n x}{x^2+a^2}\,dx$*, en utilisant le contour*



pour se ramener à $\displaystyle\int_{\to 0}^{\to+\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx$*.*

Exercice 15 *Soit* p *un réel tel que* $0 < p < 1$*.*
En utilisant le contour ci-contre,
calculer $\displaystyle\int_{\to 0}^{\to+\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1}\,dx$*.*