Université Paris-Sud 2006-2007

S5 IFIPS Mathématiques : Analyse

FEUILLE D'EXERCICES N^{0}3

Exercice 1 *1. Soit la fonction de la variable réelle t définie par $f_1(t) = 1 - t$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $f_1(t) = 0$ pour $t < 0$ ou $t > 1$. Calculer la transformée de Fourier $\hat{f}_1(u)$ de cette fonction. Le résultat satisfait-il aux conclusions du théorème de Riemann-Lebesgue ?*

2. *En déduire la transformée de Fourier de la fonction $f_2(t) = 1+t$ pour $-1 \leq t \leq 0$ et $f_2(t) = 0$ pour $t < -1$ ou $t > 0$.*

3. *Quelle est la transformée de Fourier de la fonction $f = f_1+f_2$? Qu'en est-il du comportement pour $|u| \to \infty$ de $\hat{f}$ comparé à celui des fonctions f_1 et f_2 ?*

Exercice 2 *1. On considère pour $b > 0$ la fonction de la variable réelle x donnée par $x \mapsto f(x) = e^{-b|x|}$. Dire pourquoi la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f est définie et la calculer.*

2. *En utilisant le résultat précédent, calculer la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2+a^2}$ $(a > 0)$.*

Exercice 3 *1. Soient les fonctions de la variable réelle x définie pour $m \in \mathbf{N}$ par $x \mapsto f_m(x) = |x|^m e^{-\pi x^2}$. Démontrer que les f_m sont des fonctions intégrables sur $\mathbf{R}$.*

2. *Trouver une équation différentielle linéaire du premier ordre $\mathcal{E}$ satisfaite par la fonction $x \mapsto f_0(x) = e^{-\pi x^2}$.*

3. *Donner la raison pour laquelle la fonction f_0 admet une transformée de Fourier $\hat{f}_0$ et montrer que $\hat{f}_0$ satisfait aussi à l'équation différentielle $\mathcal{E}$.*

4. *Déterminer la solution générale de $\mathcal{E}$ et en déduire l'expression de $\hat{f}$. (On rappelle que $\int_{\mathbf{R}} e^{-\pi x^2}\, dx = 1$).*

Exercice 4 *On considère la "fonction porte" symétrique Π de largeur $2a$ et de hauteur 1. Donner la définition du produit de convolution $\Pi \star \Pi$ et le calculer. Représenter graphiquement le résultat. La fonction $\Pi \star \Pi$ possède-t-elle les propriétés attendues en raison des propriétés de Π ?*

Exercice 5 *On pose $P_a(x) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{a^2+x^2}$, où $a > 0$.*

1. *Démontrer que*
$$(F(P_a \star P_b))(u) = (F(P_{a+b}))(u).$$

2. *En déduire l'expression de $P_a \star P_b$.*

3. *La fonction $x \mapsto xP_a(x)$ posséde-t-elle une transformée de Fourier ? Comment cela se traduit-il au niveau de la transformée de Fourier FP_a ?*