Université Paris-Sud
S5 IFIPS

2005-2006
Mathématiques : Analyse

Feuille d'exercices n^{0}2

Exercice 1 *On rappelle que la* mesure de Dirac *sur* $\mathbf{R}$ *est la mesure* ρ_H *dont la fonction de répartition est la fonction de Heaviside* H *qui vaut 0 sur* $]-\infty,0[$ *et 1 sur* $[0,+\infty[$. *Elle modélise une charge ponctuelle placée à l'origine.*

1. *Rappeler quelle est la mesure* $\rho_H(I)$ *d'un intervalle* I.
2. *Quels sont les ensembles de* ρ_H*-mesure nulle ?*
3. *Soit* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}_+$ *une fonction positive. Montrer que* f *est* ρ_H*-intégrable et que son intégrale vaut* $\int_{\mathbf{R}} f(x)\,d\rho_H(x)\,dx = f(0)$.

Exercice 2 *En revenant à la définition, montrer que la fonction définie sur* $[1,+\infty[$ *par* $f_a(t) = t^{-a}$ *est intégrable au sens de Lebesgue si et seulement si* $a>1$. *Montrer que la fonction définie sur* $]0,1]$ *par* $g_a(t)=t^{-a}$ *est intégrable au sens de Lebesgue si et seulement si* $a<1$.

Exercice 3
1. *Soit* $0<\epsilon<1/2$. *Démontrer que la fonction définie sur* $\mathbf{R}$ *par* $f_\epsilon(t) = \dfrac{1}{1+\epsilon\sin(t)+t^2}$ *est intégrable au sens de Lebesgue.*
2. *Calculer* $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{1+\epsilon\sin(t)+t^2}\,dt$.

Exercice 4 *Soit* f *une fonction intégrable au sens de Lebesgue sur* $[0,1]$. *Calculer* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} t^n f(t)\,dt$.

Exercice 5 *Soit* $\psi:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ *une fonction continue et bornée sur* $\mathbf{R}$. *On pose, pour* $t\in\mathbf{R}$ *et* $x\in\mathbf{R}$, $f_t(x) = \frac{e^{itx}}{1+x^2}\psi(tx)$.

1. *Démontrer que pour tout* $t\in\mathbf{R}$, f_t *est intégrable au sens de Lebesgue sur* $\mathbf{R}$.
2. *Calculer* $\displaystyle\lim_{t\to 0}\int_{\mathbf{R}} f_t(x)\,dx$.

Exercice 6 *Soit* $f:\mathbf{R}\to\mathbf{C}$ *une fonction telle qu'il existe des constantes* p_0 *et* $C\in\mathbf{R}$ *telles que pour tout* $t\geq 0$, $|f(t)|\leq C\,e^{p_0 t}$. *La* transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ *de* f *est la fonction définie sur* $\mathbf{R}$ *par* $\mathcal{L}f(p) = \displaystyle\int_{[0,+\infty[} f(t)e^{-pt}\,dt$.

Démontrer que la fonction $\mathcal{L}(f)$ *est dérivable sur l'intervalle* $]p_0,+\infty[$, *de dérivée*

$$\frac{d\mathcal{L}(f)}{dp} = \int_{[0,+\infty[} (-t)f(t)e^{-pt}\,dt.$$

Exercice 7 *L'égalité*

$$\int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right)dy = \int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\right)dx$$

est-elle vraie ?

Exercice 8 *On appelle* fonction de Bessel *la fonction définie sur* $\mathbf{R}$ *par*

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_{[0,1]}\frac{\cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy.$$

Calculer sa transformée de Laplace.