Université Paris-Sud 2005-2006
S5 IFIPS Mathématiques : Analyse

Feuille d'exercices n^{0}1

Cours/TD sur la dénombrabilité

Définition 1 *Un ensemble est dénombrable s'il est fini ou bien s'il existe une correspondance bijective entre les éléments de l'ensemble et l'ensemble des nombres entiers naturels* $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Exercice 1 *Démontrer que l'ensemble des nombres pairs* $2\mathbf{N} = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$ *est dénombrable. Même question pour l'ensemble des entiers relatifs* $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. *Plus généralement, montrer que tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable. Montrer que si un ensemble est la réunion de deux sous-ensembles disjoints qui sont dénombrables, il est dénombrable.*

Exercice 2 *Démontrer que l'ensemble des couples* (p, q) *où* p *et* q *sont des entiers strictement positifs est dénombrable. En déduire que l'ensemble* $\mathbf{Q}$ *des nombres rationnels est dénombrable.*

Exercice 3 *Démontrer que l'ensemble* A *des nombres de la forme* $0.a_1a_2a_3\ldots$ *où* $a_i \in \{1, 8\}$ *n'est pas dénombrable. On raisonnera par l'absurde. Supposant qu'il existe une bijection* $f : \mathbf{N} \to A$, *considérer le nombre* x *dont la* n*-ème décimale est égale à la* n*-ème décimale du nombre* $f(n)$, *puis* $y = 1 - x$.

En déduire que l'ensemble des points appartenant à l'intervalle $]0, 1]$ *n'est pas dénombrable.*

Exercice 4 *Soit* $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *une suite d'ensembles dénombrables. Montrer que leur réunion* $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} S_n$ *est un ensemble dénombrable.*

Exercices sur les ensembles de mesure nulle

Exercice 5

1. *Montrer qu'un point* $\{a\}$ *de* $\mathbf{R}$ *a une longueur nulle.*
2. *Démontrer qu'il en est de même pour un ensemble dénombrable de points de* $\mathbf{R}$.
3. *En déduire que l'ensemble des nombres rationnels est de longueur totale nulle.*
4. *Qu'en est il pour la surface d'une droite d'un plan ? D'un cercle ?*

Exercice 6

1. *Démontrer que l'ensemble triadique de Cantor (voir le cours) est de longueur totale nulle.*
2. *Sachant que tout nombre réel* s *de l'intervalle* $[0, 1]$ *admet un développement en base 3 de la forme*

$$s = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3^2}a_2 + \cdots + \frac{1}{3^n}a_n + \cdots,$$

où $a_n \in \{0, 1, 2\}$, *démontrer que l'ensemble de Cantor n'est pas dénombrable.*