Université Paris-Sud
Centre d'Orsay

IFIPS
2005-2006 second semestre

Mathématiques

Feuille d'exercices 4

Exercice 1 Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.(On note $\mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, et par $P_n(X)$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbf{R}$).

$$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x+y+a=0, \text{ et } x+3az=0\right\}$$
$$E_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}) | f(1)=0\}, \qquad E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}) | f(0)=1\}$$
$$E_4 = \left\{P \in P_n[X] | P' = 3\right\}, \qquad E_5 = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x+\alpha y+1 \geq 0\right\}.$$

Exercice 2 Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x+y=0\}$; $\qquad E_1' = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | xy=0\}$.
$E_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 | x=0, y=z\}$; $\qquad E_2' = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x=1\}$.
$E_3 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x^2+xy \geq 0\}$; $\qquad E_3' = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x^2+xy+y^2 \geq 0\}$.
$E_4 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}) | f(1)=0\}$; $\qquad E_4' = \{f \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R})/|f(0)=1\}$;
$E_4" = \{f \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}) | f \text{ est croissante}\}$.

Exercice 3 Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$. Calculer leurs dimensions.

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y-z = x+y+z = 0\}$.
$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2-z^2 = 0\}$.
$E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid e^x e^y = 0\}$.
$E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z(x^2+y^2) = 0\}$.

Exercice 4 Montrer que l'ensemble $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbf{R},\mathbf{R}) | \exists (a,\varphi) \in \mathbf{R}^2 \quad f(x) = a\cos(x-\varphi)\}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

Exercice 5 Soient dans $\mathbf{R}^3$ les vecteurs $\vec{v_1}(1,1,0)$, $\vec{v_2}(4,1,4)$ et $\vec{v_3}(2,-1,4)$.

1. Montrer que $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires. Faire de même avec $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$, puis avec $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$.
2. La famille $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ est-elle libre ?

Exercice 6 On considère dans $\mathbf{R}^n$ une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, \vec{e_4})$. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_2}, \vec{e_3})$.
2. $(\vec{e_1}, \vec{e_3})$.
3. $(\vec{e_1}, 2\vec{e_1}+\vec{e_4}, \vec{e_4})$.
4. $(3\vec{e_1}+\vec{e_3}, \vec{e_3}, \vec{e_2}+\vec{e_3})$.

5. $(2\vec{e_1}+\vec{e_2}, \vec{e_1}-3\vec{e_2}, \vec{e_4}, \vec{e_2}-\vec{e_1})$.

Exercice 7 Dans $\mathbf{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$? Si oui, en donner une base.

Exercice 8 Soient dans $\mathbf{R}^4$ les vecteurs $\vec{e_1}(1,2,3,4)$ et $\vec{e_2}(1,-2,3,-4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x,1,y,1) \in Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$? Et pour que $(x,1,1,y) \in Vect\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$?

Exercice 9 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ et x, y, z, t une famille libre d'éléments de E, les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $x, 2y, z$.
2. x, z.
3. $x, 2x+t, t$.
4. $3x+z, z, y+z$.
5. $2x+y, x-3y, t, y-x$.

Exercice 10 Soient E et F les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ engendrés respectivement par les vecteurs $\{(2,3,-1), (1,-1,-2)\}$ et $\{(3,7,0), (5,0,-7)\}$. Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 11 Effectuer le produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 12 Trouver les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. De même avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 13 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité 3×3. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 14

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.
   (a) Calculer B^2, B^3 en déduire une formule de récurrence que l'on démontrera pour B^n, pour tout entier n.
   (b) Développer $(B+I_3)^n$ par la formule du binome et simplifier.
   (c) En déduire A^n Pour tout entier n.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier n, calculer A^n en utilisant $A - I_4$.

Exercice 15

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

   Montrer que $AB = AC$, a-t-on $A = C$? A peut-elle être inversible ?

   (b) Déterminer toutes les matrices F telles que $A \times F = O$ (O étant la matrice dont tous les coefficients sont nuls).

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B telles que $BA = I_2$.

3. Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$ telles que $AB = A + I_n$.

   Montrer que A est inversible et déterminer son inverse (en fonction de B).

Exercice 16 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculer A^2 et montrer que $A^2 = 2I - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.