Université Paris-Sud | IFIPS
Centre d'Orsay | 2005-2006 second semestre

Mathématiques

Feuille d'exercices 3

Exercice 1 Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $y'' - y = x^3 + x^2$,
2. $y'' - 2y' + y = e^x$,
3. $y'' - 2y' + y = \cos(mx)$ où $m \in \mathbf{R}$,
4. $y'' + 2y' + y = 2x \cos x \cosh x$,
5. $y'' - 2y' + y = x^3 e^x + 2\cos x + (x^3 + 3)$ (utiliser le principe de superposition).

Exercice 2 On considère l'équation homogène (E) $ay'' + by' + cy = 0$, avec $a \neq 0$. Donner des conditions necessaires et suffisantes sur les coefficients a, b et c pour que :
(i) toutes les solutions de (E) tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$;
(ii) toutes les solutions sont périodiques.

Exercice 3 Résoudre l'équation :

$$y'' + k^2 y = \cos mx, \quad k, m \in \mathbf{R}.$$

On discutera suivant les valeurs de k et m.

Exercice 4 On considère l'équation :

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2. Trouver une solution particulière de (E), puis trouver l'ensemble de toutes les solutions de (E).
3. Déterminer l'unique solution h de (E) vérifiant $h(0) = 1$ et $h(1) = 0$.
4. Soit $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction deux fois dérivable sur $]0, \infty[$ et qui vérifie :

$$t^2 f''(t) + 3t f'(t) + 4f(t) = t \log t.$$

   (a) On pose $g(x) = f(e^x)$, vérifier que g est solution de (E).
   (b) En déduire une expression de f.

Exercice 5 Soit $m \in \mathbf{R}$. Déterminer la solution de l'équation :

$$(E_m) \qquad y'' - 2y' + (1 + m^2)y = (1 + 4m^2)\cos mx$$

qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ (Indication : On traitera séparement les cas $m = 0$ et $m \neq 0$).

Exercice 6 Déterminer une équation différentielle vérifiée par la famille de fonctions

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \quad C_1, C_2 \in \mathbf{R}.$$

Exercice 7 Résoudre sur $]0, +\infty[$ $xy'' - y' - x^3 y = 0$ en posant $z(t) = y(\sqrt{t})$.

Exercice 8 Résoudre en posant $z(t) = y(e^t)$ ou $y(-e^t)$ suivant le signe de x, les équations différentielles (d'Euler) suivantes :

1. $x^2 y'' - 2y = x$.
2. $x^2 y'' + xy' + y = x \ln |x|$.

Exercice 9 Résoudre l'équation différentielle de Bernouilli $x^2 y^2 - xy' - 3y = 0$ en supposant que y ne s'annule pas et en posant $z = \frac{1}{y}$.

Exercice 10 On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad y'' - 4y' + 4y = d(x),$$

où d est une fonction qui sera précisée plus loin.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène (ou sans second membre) associée à (E).
2. Trouver une solution particulière de (E) lorsque $d(x) = e^{-2x}$ et lorsque $d(x) = e^{2x}$ respectivement.
3. Donner la forme générale des solutions de $(E.D)$ lorsque

$$d(x) = \frac{e^{-2x} + e^{2x}}{4}.$$

Exercice 11 Soit p continue positive non nulle ; montrer que toute solution de $y''(x) + p(x)y(x) = 0$ s'annule au moins une fois sur $\mathbf{R}$‘.