Université Paris-Sud
Centre d'Orsay

IFIPS
2005-2006 second semestre

Mathématiques

Feuille d'exercices 2

Calcul de développements limités

Exercice 1 Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1. $x \mapsto \ln(\cos(x))$ (à l'ordre 4).
2. $x \mapsto \tan(x)$ (à l'ordre 3).
3. $x \mapsto \sin(\tan(x))$ (à l'ordre 5).
4. $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 3).
5. $x \mapsto \exp(\sin(x))$ (à l'ordre 3).
6. $x \mapsto \sin^3(x)$ (à l'ordre 5.)

Exercice 2 Calculer le développement limité en a à l'ordre n de :

1. $\dfrac{\arctan x - x}{\sin x - x}$ $n = 2$ $a = 0$.
2. $\ln\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})$ $n = 3$ $a = 0$.
3. $\ln\sin x$ $n = 3$ $a = \frac{\pi}{4}$.
4. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $n = 3$ $a = 0$.

Exercice 3 Calculer les développements limités en 0 de :

1. $\cos x . \ln(1+x)$ à l'ordre 4.
2. $\dfrac{1}{\cos x}$ à l'ordre 4.
3. $\arcsin\big(\ln(1+x^2)\big)$ à l'ordre 6.
4. $\dfrac{\sinh x - x}{x^3}$ à l'ordre 4.
5. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 3.

Applications aux calculs de limites

Exercice 4 Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

Exercice 5 A l'aide de D.L., calculer les limites suivantes:

$$\ell_1 = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x - \ln(1+x)} \ , \quad \ell_2 = \lim_{x\to 1} \frac{x\ln x + 1 - x}{(x-1)\ln x} \ , \quad \ell_3 = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} \ .$$

Exercice 6 A l'aide de DL, calculer les limites suivantes si elles existent:

$$\ell_1 = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\arcsin x}{x - \tan^2 x} \ , \quad \ell_2 = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x} \ ; \quad \ell_3 = \lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} \ .$$

Exercice 7 Calculer les limites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{x}, \ \lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}.$$

Applications à l'étude locale de fonctions

Exercice 8 Soit f une fonction de classe C^3 sur $\mathbf{R}$ telle que $f(0) = 0$. On pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour $x \neq 0$.

Montrer que g se prolonge en une fonction continue et dérivable sur $\mathbf{R}$, que l'on notera $\tilde{g}$. Donner les valeurs de $\tilde{g}(0)$ et $\tilde{g}'(0)$.

Calculer $\tilde{g}'(x)$ pour $x \neq 0$ et montrer que $\tilde{g}'$ est continue en 0.

Exercice 9 Donner à l'aide de D.L., au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$, l'asymptote et la position par rapport à l'asymptote, de la courbe d'équation $y = \dfrac{x^2}{1+x} e^{1/x}$.

Exercice 10 Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{4}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{4}[$ par

$$f(x) = \frac{g(x)}{\tan x} \quad \text{avec} \quad g(x) = e^{\sqrt{1+\sin x}} - e \ .$$

1. Calculer le $DL_3(0)$ de g.
2. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
3. Notons $\tilde{f}$ ce prolongement de f. Montrer que $\tilde{f}$ est dérivable en 0.
4. Donner l'équation de la tangente (t) au graphe de $\tilde{f}$ au point $(0, \tilde{f}(0)))$.
5. Prciser la position du graphe de $\tilde{f}$ par rapport (t) au voisinage de 0.

Exercice 11 Étudier la position du graphe de l'application $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et 1.

Exercice 12 On considère la fonction f définie sur $]-\pi,\pi[$ par:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

Calculer le DL à l'ordre 4 en 0 de f.

En déduire que f est continue et dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

Applications de la formule de Taylor-Lagrange

Exercice 13 En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que

$$\begin{array}{ll} (a) & \forall x \in \mathbf{R} : |e^x - x - 1| \leq \frac{1}{2}\, x^2\, e^{|x|} \\ (b) & \forall x \in \mathbf{R}_+ : x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x \;, \\ (c) & \forall x > 0,\; x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}. \end{array}$$

Exercice 14 Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ telle que $f''(x) \geq 0$ pour tout x et $f'(0) > 0$. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) + +\infty$.

Exercice 15 Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ telle que $f''(x) \geq 10^{-4}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) + +\infty$.

Exercice 16 Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ telle que $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. Montrer que pour tous points x, y de I on a:

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f(\frac{x+y}{2}).$$