# Mathématiques

## Feuille d'exercices 1

**Exercice 1** Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^2 (t^4+3t^2-t)dt\,;$ (b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt\,;$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(t+1)(t+2)(t+3)dt\,;$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{5}|t-3|dt\,;$ (e) $\displaystyle\int_1^3 (t^{\frac{3}{2}}+t^{-\frac{3}{2}})dt\,;$ (f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t-1}dt\,;$

(g) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(\sin t+\cos t)^2 dt\,;$ (h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3t}{\sqrt{1+t^2}}dt\,;$

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t\cos^2 2t dt$ ; (j) $\displaystyle\int_1^2 t\ln t dt\,.$

**Exercice 2** Linéariser $\cos^4 x$ et calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4 t dt\,.$

**Exercice 3** Quelle est l'aire limitée par les droites d'équations $y=\dfrac{x}{4}$ et $y=2x$ respectivement, et la courbe d'équation $y=\dfrac{2}{x^2}$ ?

**Exercice 4** Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant leurs domaines de définition.

(a) $x\mapsto x^2\mathrm{e}^x$ ; (b) $x\mapsto \ln x$ ; (c) $x\mapsto x\ln(x+1)$ ;
(d) $x\mapsto \sqrt{x}\ln x$ ; (e) $x\mapsto \arctan x$ ; (f) $x\mapsto x\arctan x$ ;
(g) $x\mapsto \ln^2 x$ ; (h) $x\mapsto \mathrm{e}^x\cos x$ ;

**Exercice 5** Dans cet exercice, $a$ désigne un réel strictement positif. Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant leurs domaines de définition.

(a) $x\mapsto \dfrac{x-3}{2x^2+2x+1}$ ; (b) $x\mapsto \dfrac{1}{x^2-2x-3}$ ; (c) $x\mapsto \dfrac{x^2+1}{(x-1)(2x^2+2x+1)}$ ;

(d) $x\mapsto \dfrac{1}{x^2+5}$ ; (e) $x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{6-x^2}}$ ; (f) $x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ ; (g) $x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ ;

**Exercice 6** Calculer les intégrales suivantes à l'aide

1. d'un changement de variable d'intégration :

(a) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{dt}{t\ln^2 t}$ ; (b) $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\frac{t^2}{1-t^3}dt$ ; (c) $\displaystyle\int_{1/2}^{2}\frac{\ln t}{1+t^2}dt$ (on prend pour nouvelle variable $x=1/t$) ;

(d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{\sin t+\tan t}$ (on prend pour nouvelle variable $x=\tan(t/2)$).

2. d'un ou plusieurs changements de variables d'intégration :

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}t^2\sqrt{1-t^2}dt$ (on prend pour nouvelle variable $u$ telle que $t=\sin u$) ;

(b) $\displaystyle\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-t^2}dt$ où $R$ est un réel positif. Interpréter géométriquement le résultat.

**Exercice 7**

Des deux intégrales suivantes, laquelle est la plus facile à calculer ? Effectuer ce calcul.

$$\int_1^{\sqrt{3}}\left(\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy \quad \text{ou} \quad \int_0^1\left(\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx.$$

**Exercice 8**

Calculer $\int\int_D \frac{xy^2}{1+x^2}dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\leq x\leq 2,\ \ 0\leq y\leq 1\}$.

**Exercice 9**

Calculer $\int_0^1\left(\int_0^y \frac{2(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2}dx\right)dy$, puis $\int_0^1\left(\int_x^1 \frac{2(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2}dy\right)dx$.
L'égalité était-elle prévisible ?

**Exercice 10**

Calculer $\int_0^1\left(\int_0^{1-y} a^x b^y dx\right)dy$, où $a$ et $b$ sont des réels strictement positifs, distincts et différents de 1.

**Exercice 11**

Pour $0<\varepsilon<1$, calculer $I_\varepsilon=\int\int_{D_\varepsilon}\exp\left(\frac{y}{x}\right)dxdy$,
où $D_\varepsilon=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 0\leq y\leq x,\ \varepsilon\leq x\leq 1\}$. Quelle est la limite de $I_\varepsilon$ lorsque $\varepsilon$ tend vers 0 ?

**Exercice 12**

Calculer $\int\int_D(1-x-y)dxdy$, où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x+y\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$.

**Exercice 13**

Calculer l'aire du domaine $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\leq y\leq 2-x^2\}$.

**Exercice 14**

Calculer (en utilisant les coordonnées polaires) $\int\int_D \frac{y^3}{x^2+y^2}dxdy$,
où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 1\leq x^2+y^2\leq 4,\ x\geq 0,\ y\leq x\}$.

**Exercice 15**

Calculer directement, puis à l'aide des coordonnées polaires $\int\int_D \frac{x}{x^2+y^2}dxdy$,
où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ 1\leq x\leq\sqrt{3},\ \frac{x}{\sqrt{3}}\leq y\leq x\}$.

**Exercice 16**

Calculer $\int\int_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$, où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2\leq R^2\}$.

**Exercice 17**

Calculer le volume d'une pyramide de hauteur $h$ et de base rectangle de largeur $l$ et de longueur $L$.

**Exercice 18**

Soit $a > R > 0$. Calculer l'intégrale suivante, qui détermine le potentiel électrique créé au point $(0,0,a)$ par la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon $R$ chargée uniformément par une densité de charge constante $\rho$.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\int\int_{B(0,R)} \frac{\rho}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} dxdydz$$

**Exercice 19**

Déterminer et représenter l'ensemble de définition, puis calculer les dérivées partielles des fonctions définies par :

$$f_1(x,y) = \arctan(xy), \quad f_2(x,y) = \arctan(\frac{x}{y}), \quad f_3(x,y) = \exp(\frac{x}{y}) + \exp(\frac{y}{x}),$$

$$f_4(x,y) = x^2\sin(y), \quad f_5(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \quad f_6(x,y) = \ln(x+y).$$

**Exercice 20**

a) Trouver toutes les fonctions $f$ telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3y^2 + 2xy^4 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^4y + 4x^2y^3 + \cos(y)$$

Comparer $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ et $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$.

b) Mêmes questions avec:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$$