

FEUILLE D'EXERCICES N° 2,

Exercice 1 1. Représenter graphiquement les ensembles

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y < 1\}, & A_2 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y > -1\}, \\ A_3 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x + y| < 1\}, & A_4 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}, \\ A_5 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x - y| < 1\}. \end{aligned}$$

2. En déduire une démonstration géométrique de l'équivalence

$$(|x + y| < 1 \text{ et } |x - y| < 1) \Leftrightarrow |x| + |y| < 1.$$

(On montrera l'égalité de deux ensembles en détaillant chacune des deux inclusions).

3. On rappelle que l'inégalité triangulaire s'énonce

$$(\forall a \in \mathbf{R}) (\forall b \in \mathbf{R}) (|a + b| \leq |a| + |b|).$$

Montrez l'équivalence précédente en utilisant l'inégalité triangulaire.

Exercice 2 On pose $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > x^2 - 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y < 1 - x^2\}$.

1. Représenter graphiquement A , B , $A \cap B$, $A \cup B$, \overline{A} , \overline{B} , $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A \cup B}$. Ecrire chacun de ces ensembles sous la forme $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid \dots\}$.

2. Soient A et B deux parties d'un ensemble quelconque E . Exprimer les ensembles $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A \cup B}$ à l'aide de \overline{A} et \overline{B} et prouver les égalités données.

Exercice 3 1. Représenter graphiquement l'ensemble F des couples $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tels que

$$x^2 + y^2 \leq 9 \text{ et } (x + y > 3 \text{ ou } xy < 2).$$

2. Exprimer l'ensemble F sous la forme $F = A \cap (B \cup C)$ où A , B et C sont trois ensembles que l'on définira à partir des données de la question 1. Vérifier graphiquement que F s'exprime également à partir de $A \cap B$ et $A \cap C$.

3. Soient A , B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E quelconque. Montrer que

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Exercice 4 Soient $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y < 1\}$ et $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y > 0\}$.

1. Soit Q l'ensemble des points de A qui ne sont pas dans B ou pas dans C . Dessiner Q . Ecrire Q comme la différence de deux ensembles.

2. Dessiner les ensembles $R = A \setminus B$ et $S = A \setminus C$. Quelle est leur réunion ?

3. Plus généralement, montrer que si A , B et C sont trois sous-ensembles d'un ensemble E , alors $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Exercice 5 Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point.

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n} \right], \quad I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[0, \frac{1}{n} \right], \quad I_3 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[n, +\infty \right], \quad I_4 = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}, +\infty \right].$$

Exercice 6 On définit deux applications sur $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ par $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $g : x \mapsto 1-x$.

1. Vérifier que f et g envoient $\mathbf{R} \setminus \{0, 1\}$ dans lui-même.
2. Calculer les composées $f \circ g$ et $g \circ f$. Que constate-t-on ?

Exercice 7 On considère l'application $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par $f(x) = x^2$.

Déterminer, par une méthode graphique, les ensembles suivants :

$$f([-5, -2]), \quad f([-1, 3]), \quad f([-5, -2] \cup [-1, 3]) \quad \text{et} \quad f([-5, -2] \cap [-1, 3]).$$

Exercice 8 Soit $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une application. Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a < b$, et $I = [a, b]$. L'image $g(I)$ est-elle un intervalle de \mathbf{R} ? Si $g(I)$ est un intervalle, est-il nécessairement borné ? Fermé ? Donner des contre-exemples.

Exercice 9 Soit E l'ensemble des entiers naturels strictement supérieurs à 1. Soit $f : E \rightarrow E$ l'application qui à un entier naturel $n > 1$ associe le plus petit diviseur positif de n autre que 1.

1. Soit $A = \{2, 3, \dots, 10\}$. Déterminer l'image de A par f .
2. Déterminer l'image réciproque par f de l'ensemble $\{3\}$.

Exercice 10 Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Soient $A = [0, 1[$, $B =]1/2, 1]$, $C = [1, 2]$, $D =]1, 3]$. Par une méthode graphique, déterminer les images réciproques $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$, $f^{-1}(C)$, $f^{-1}(D)$, $f^{-1}(A \cap B)$, $f^{-1}(A \cup B)$. Comparer à $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

Exercice 11 1. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$. Soit $A = [1, +\infty[$, $B = [-2, 0]$, $G = [0, 1]$. Par une méthode graphique, déterminer $H = f(B)$, $K = H \setminus G$, $C = f^{-1}(K)$, $D = A \cap C$. Vérifier que pour tout $x \in D$ il existe $x' \in B$ tel que $f(x') = f(x) \notin G$.

2. Soient E et F des ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application, $A \subset E$, $B \subset E$, $G \subset F$. Vérifier que l'ensemble des éléments de A dont l'image par f n'est pas dans G et coïncide avec celle d'un élément de B est $A \cap f^{-1}(f(B) \setminus G)$.

Exercice 12 Soit $E = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$. L'application $f : E \rightarrow E$ définie par $f(z) = z^2$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 13 Une maison d'édition exploite une base de données contenant les noms et années de naissance de ses auteurs, les titres et les années de parution des livres. On note A l'ensemble des auteurs, L l'ensemble des livres. On note Y l'ensemble des entiers compris entre 1901 et 2000 et Z l'ensemble des entiers compris entre 1945 et 2005. On note $n : A \rightarrow Y$ la fonction qui à un auteur associe son année de naissance, et $p : L \rightarrow Z$ la fonction qui à un livre associe son année de parution. On note $B \subset A \times L$ l'ensemble des couples (auteur, ouvrage de cet auteur). On suppose que chaque livre n'a qu'un auteur.

1. Que signifie le fait que l'application $p : L \rightarrow Z$ n'est pas surjective ? Répondre en langage courant, puis par une formule mathématique. Si la maison d'édition a 30 livres, p est-elle surjective ?
2. Que signifie le fait que l'application $c : B \rightarrow Y \times Z$ définie par $c(a, l) = (n(a), p(l))$ n'est pas injective ? Répondre en langage courant, puis par une formule mathématique. Si la maison d'édition a 10000 livres, c est-elle injective ?
3. Décrire par une formule l'ensemble C des livres dont l'auteur est né en 1955 ou plus tôt.
4. On note Z' l'ensemble des entiers compris entre 1995 et 2005. Soit $F = p^{-1}(Z')$ et G la différence $G = C \setminus F$. Décrire G en langage courant et par une formule.

5. On note Y' l'ensemble des entiers compris entre 1901 et 1955. On pose $D = n^{-1}(Y')$. Décrire D en langage courant et par une formule. L'ensemble C est-il contenu dans D ?

Exercice 14 Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ des applications. Montrer que

$$(g \circ f \text{ surjective}) \Rightarrow (g \text{ surjective}).$$

Exercice 15 Soient f et g deux fonctions définies dans une partie E de \mathbf{R} .

1. Montrer que si f et g sont croissantes sur E , alors la fonction somme $f + g$ est croissante sur E .
2. Montrer que si f et g sont positives et croissantes sur E , alors la fonction produit fg est croissante sur E .
3. On suppose que $f \circ g$ est définie sur E . Montrer que si f et g sont toutes deux croissantes ou bien toutes deux décroissantes sur E , alors $f \circ g$ est croissante sur E .
4. Etudier la monotonie (en utilisant la monotonie des fonctions logarithme et exponentielle et sans utiliser une variation de fonction) de la fonction $h : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$h(x) = (\ln(e + x^2) - 1)e^{(2\sqrt{x}+3)}.$$

Soit a un nombre réel, $a > 0$, la fonction h est-elle bornée sur l'intervalle $[0, a]$?