Université Paris-Sud 2006-2007
S1 IFIPS Compléments maths

Feuille d'exercices n^{0}1

Exercice 1 *Soient x, y, a et b des nombres réels. Pour chacune des implications suivantes, dire si elle est vraie (et le prouver), ou bien fausse (et donner un contre–exemple).*

1. $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$
2. $x^2 < 4 \Rightarrow x < 3$
3. $(x < 2 \text{ et } y < 3) \Rightarrow 2x + 5y < 21$
4. $(xy \neq 0 \text{ et } x < y) \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$
5. $(xy > 0 \text{ et } x < y) \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

Exercice 2 *Soient a, b et c trois nombres entiers relatifs. La notation* $\mathbf{b} \mid \mathbf{a}$ *signifie "b divise a". Dire, en le justifiant, si les implications suivantes sont vraies ou fausses.*

1. $(b \mid a \text{ et } b \mid c) \Rightarrow b \mid (a + c)$
2. $b \mid (a + c) \Rightarrow (b \mid a \text{ et } b \mid c)$
3. $(b \mid a \text{ et } b \mid (a + c)) \Rightarrow b \mid c$
4. *Si b est premier avec a et avec c alors b ne divise pas $a + c$.*

Exercice 3 *Traduire les assertions suivantes, portant sur une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, en langage courant.*

$$(\exists x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R})((x < y) \text{ et } (f(x) \geq f(y))). \tag{1}$$

$$(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R})(x < y)(\exists z \in \mathbf{R})((x < z < y) \text{ et } (f(z) \leq f(x))). \tag{2}$$

Exercice 4 *Ecrire les réponses aux questions suivantes, portant sur des nombres entiers naturels que l'on pourra noter m et n, sous la forme d'assertions mathématiques (écrites avec "et, ou, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$") et les prouver.*

1. *Le produit de deux nombres pairs est–il pair ?*
2. *Le produit de deux nombres impairs est–il pair ou impair ?*
3. *Le produit d'un nombre pair et d'un nombre impair est–il pair ou impair ?*
4. *Un entier est impair si et seulement si son carré est impair ?*

Exercice 5 *Soient f_1, f_2 et f_3 des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Pour chacune des propriétés suivantes, écrire sa négation et illustrer graphiquement la propriété et sa négation.*

1. $(\forall i \in \{1, 2, 3\})(\exists a \in \mathbf{R})(f_i(a) = 1)$.
2. $(\exists i \in \{1, 2, 3\})(\forall a \in \mathbf{R})(f_i(a) = 1)$.
3. $(\exists a \in \mathbf{R})(\forall i \in \{1, 2, 3\})(f_i(a) = 1)$.
4. $(\forall a \in \mathbf{R})(\forall i \in \{1, 2, 3\})(f_i(a) = 1)$.

Exercice 6 *Ecrire les assertions suivantes et leurs négations avec des quantificateurs (on pourra noter H l'ensemble des hommes, M l'ensemble des mathématiciens et F l'ensemble des farceurs). Ecrire la réciproque ou la réciproque de la négation, suivant les cas.*

1. *Les mathématiciens sont tous des farceurs.*
2. *Les mathématiciens ne sont jamais des farceurs.*
3. *Il y a des mathématiciens qui ne sont pas des farceurs.*
4. *Il y a des farceurs qui ne sont pas des mathématiciens.*
5. *Certains mathématiciens sont des farceurs.*

Exercice 7

1. *Ecrire les assertions suivantes, leurs négations et leurs réciproques avec des quantificateurs. Dans chaque cas, dire si l'assertion est vraie ou fausse et le justifier.*
   - *(a) Tout entier naturel divisible par* 6*, est divisible par* 3.
   - *(b) Tout entier naturel divisible par* 2 *et par* 3*, est divisible par* 6.
   - *(c) Tout entier naturel divisible par* 2 *et par* 14*, est divisible par* 28.
2. *Etre divisible par 3 est-il une condition nécessaire ? suffisante ? pour être divisible par 6 ?*

Exercice 8 *Voici une saynète extraite d'un ouvrage de Lewis Carrol. Un témoin a assisté à un cambriolage. Sa déposition est confuse, mais il en ressort quelques informations certaines. Chacune des assertions suivantes est vraie :*

1. *Si le cambrioleur a un complice, alors il est venu en voiture.*
2. *Le cambrioleur n'avait pas de complice et n'avait pas la clé ou bien le cambrioleur avait un complice et avait la clé.*
3. *Le cambrioleur avait la clé.*

Que peut-on en conclure ? Si on remplace la dernière par le cambrioleur n'avait pas la clé*, peut-on conclure ?*

Exercice 9

1. *Voici deux phrases. Ont elles le même sens ?*
   - *a.* Quand il fait chaud, l'absence de vent provoque des pics de pollution.
   - *b.* Chaleur et absence de vent provoquent des pics de pollution.
2. *Soient A, B et C des assertions. Parmi les assertions suivantes, certaines sont équivalentes. Lesquelles ?*
   - *(a)* $\mathcal{P}_1 : A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$.
   - *(b)* $\mathcal{P}_2 : (A \text{ et } B) \Rightarrow C$.
   - *(c)* $\mathcal{P}_3 : (A \text{ ou } B) \Rightarrow C$.
   - *(d)* $\mathcal{P}_4 : (A \Rightarrow C) \text{ et } (B \Rightarrow C)$.

   Supposons que A est fausse, B et vraie, C est fausse. Les assertions $\mathcal{P}_1, \dots \mathcal{P}_4$ sont-elles vraies ou fausses ?

Exercice 10 *Ecrire les contraposées des implications suivantes et les démontrer (n est un nombre entier naturel, x et y sont des nombres réels) :*

1. n *premier* $\Rightarrow ((n = 2)$ *ou* $(n$ *impair*$))$.
2. $xy \neq 0 \Rightarrow ((x \neq 0)$ *et* $(y \neq 0))$.

3. $(x \neq y) \Rightarrow [(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)]$.

Exercice 11 *Soient n et p des entiers naturels ; montrer que soit np est pair, soit $n^2 - p^2$ est divisible par 8.*

Exercice 12 *Soit n un entier naturel non nul ; montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel p tel que $n^2 + 1 = p^2$.*

Exercice 13 *Démontrer par l'absurde que l'équation $12n^3 - 7n = 1$ n'a aucune solution dans $\mathbf{Z}$.*

Exercice 14 *Pour chacune des questions suivantes, on pourra utiliser un raisonnement par récurrence ou chercher un autre type de preuve.*

1. *Pour quels entiers naturels n a–t–on $n^2 < n!$?*
2. *Démontrer que pour $n \in \mathbf{N}^*$ on a : $1 \times 1! + 2 \times 2! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1$.*
3. *Montrer que pour $n \in \mathbf{N}^*$ on a : $\sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.*

Exercice 15* *Soient k et n deux entiers naturels tels que $k \leq n$. On rappelle que le nombre $\binom{n}{k}$ de combinaisons de n objets pris k à k vaut $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.*

1. *Montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ et $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.*
2. *En déduire la formule du binôme de Newton : pour tous nombres réels a et b et tout n dans $\mathbf{N}$,*
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.$$
3. *Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.*
4. *Une personne veut inviter au moins deux personnes parmi six de ses amis. Combien a–t–elle de possibilités ?*