Université Paris-Sud — 2008-2009
Cycle Ingénieur IFIPS, filière étudiants — Remise à niveau

Feuille d'exercices n^{0}2

Exercice 1 *Etudier la convergence des séries de termes généraux suivants.*

$$u_n = \frac{1}{n(n-1)},\ n>1, \quad u_n = \frac{1}{n+\ell n(n)},\ n>0,$$

$$u_n = \frac{1}{2^n-1},\ n>0, \quad u_n = \frac{1}{(3+(-1)^n)^n},$$

$$u_n = \frac{\ell n(n)}{n},\ n>0, \quad u_n = \frac{1}{n!}, \quad u_n = \frac{n}{3^n},$$

$$u_n = \tan(\frac{1}{2^n}), \quad u_n = \frac{1}{\ell n(n)},\ n>1.$$

Exercice 2
1. *Montrer que les séries dont les termes généraux suivent sont absolument convergentes.*

$$u_n = \frac{\cos n}{n^2}, \quad v_n = \frac{\cos n}{n!}, \quad w_n = \frac{(-1)^n}{n^3}, \quad z_n = \frac{e^{(1+i)n}}{2^{n^2}}.$$

2. *Calculer* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{2^n}$.

Exercice 3 *Développer en série de Fourier le créneau centré en 0 d'amplitude A, de durée d et de période T. Construire le spectre du créneau dans le cas où $A = 1$, $d = \pi$ et $T = 2\pi$. En déduire la valeur de la somme* $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

Exercice 4 *Développer en série de Fourier la fonction paire de période 2π égale à $\pi - t$ pour $0 \leq t \leq \pi$ et construire son spectre.*

En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$ *et retrouver celle de* $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

Exercice 5 *Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, périodique de période T. Pour $a \in \mathbf{R}$, on pose $f_a(t) = f(t+a)$. Relier les coefficients de Fourier de f_a à ceux de f.*

Exercice 6 *Développer en série de Fourier la fonction f définie par $f(t) = |\sin t|$. En déduire*

1. *la série de Fourier de la fonction g périodique de période 2π telle que*

$$\begin{cases} g(t) = \sin t & \text{pour } t \in [0, \pi], \\ g(t) = 0 & \text{pour } t \in]-\pi, 0[. \end{cases}$$

2. *La série de Fourier de la fonction h définie par $h(t) = |\cos t|$.*

Exercice 7 *Soit f une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$, périodique de période T. On suppose que sa dérivée f' est continue. Relier les coefficients de Fourier de f' à ceux de f.*

Exercice 8 *Soit f la fonction périodique de période 1 telle que $f(t) = t$ pour $t \in [-1/2, 1/2[$.*

1. *Développer f en série de Fourier réelle, puis en série de Fourier complexe. Préciser le fondamental et les harmoniques de rang 2 et 3.*
2. *Représenter graphiquement le spectre de f pour les fréquences comprises dans l'intervalle $[-4, 4]$.*

Exercice 9 *Soit f la fonction paire et périodique de période 2π telle que $f(t) = t(\pi - t)$ pour $t \in [0, \pi[$. Développer f en série de Fourier. En déduire la formule $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.*

Exercice 10 *Etudier la convergence des intégrales suivantes, et calculer leur valeur.*

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt, \quad \int_0^{\to+\infty} e^{-t}\,dt, \quad \int_0^{\to+\infty} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt, \quad \int_0^{\to+\infty} t^2 e^{-t}\,dt,$$

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt, \quad \int_0^{\to\frac{\pi}{2}} \tan(t)\,dt, \quad \int_0^{\to 1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \quad \int_{\to a}^{b} \ell n(x-a)\,dx \text{ où } (0 < a < b).$$

Exercice 11 *Etudier, sans les calculer, la convergence des intégrales suivantes.*

$$\int_{\to 0}^{\to+\infty} \frac{e^t}{t^2}\,dt, \quad \int_{\to 0}^{\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t(1+t)^3}}\,dt, \quad \int_0^{\to+\infty} \frac{1}{1+|\sin t|}\,dt.$$

Exercice 12 *Etudier, sans les calculer, la convergence des intégrales suivantes.*

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{\sqrt{t}\sin(1/t^2)}{\ell n(1+t)}\,dt, \quad \int_{\to-\infty}^{\to+\infty} \frac{t}{1+t^2}\,dt.$$

Exercice 13 *Etudier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx$ et $\displaystyle\int_1^{\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$. En déduire la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{\to+\infty} f(t)\,dt$ où f est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ pour $t \neq 0$ et $f(0) = 1$.*

Exercice 14 *Démontrer la convergence des intégrales dites de Fresnel*

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}\,dt \quad \textit{puis} \quad \int_0^{\to+\infty} \cos(t^2)\,dt.$$