Université Paris-Sud | 2008-2009
Cycle Ingénieur IFIPS, filière étudiants | Remise à niveau

Feuille d'exercices n^{0}1

Exercice 1 *Calculer les parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants.*

$$a)\ (1-i)^3, \quad b)\ \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}, \quad c)\ e^{-24i\pi}+e^{4i\pi}.$$

Exercice 2 *Calculer le module et l'argument (choisi dans* $[0,2\pi[$*) des nombres complexes suivants.*

$$a)\ 1+i, \quad b)\ \sqrt{3}+i, \quad c)\ 1-\sqrt{3}i, \quad d)\ \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}.$$

e) En déduire les valeurs de $\cos(\pi/12)$ *et* $\sin(\pi/12)$.

Exercice 3 *Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants.*

$$a)\ 15-8i, \quad b)\ 1+i, \quad c)\ 5+12i.$$

Exercice 4 *Résoudre, pour* $z \in \mathbf{C}$*, les équations du second degré suivantes.*

1. $z^2+z+1=0.$
2. $z^2-(1+2i)z-1+i=0.$
3. $z^2-5(1+i)z+17i=0.$

Exercice 5 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$. *Déterminer les valeurs propres de* A. *Déterminer un vecteur propre de* A.

Exercice 6 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. *Déterminer les valeurs propres de* A. *Déterminer une base formée de vecteurs propres de* A. *Ecrire la solution générale du système différentiel*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & y(t) \\ y'(t) & = & -3x(t)+4y(t) \end{array} \right. .$$

Déterminer la solution $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ *telle que* $X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. *En déduire la solution de l'équation différentielle* $x''-4x'+3x=0$ *de conditions initiales* $x(0)=2$ *et* $x'(0)=0$.

Exercice 7 *Soit* $x \in \mathbf{R}$. *Calculer les intégrales suivantes.*

$$\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt, \quad \int_0^x t\sqrt{1-t^2}\,dt, \quad \int_2^x \frac{1}{t^3-t}\,dt \text{ si } x>1, \quad \int_0^x \frac{1}{2+\cos t}\,dt, \quad \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt.$$

Exercice 8 *On pose* $u_n = \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{2n}$. *Montrer que la suite* u_n *converge vers* $\ell n(2)$. *En déduire que la suite* $v_n = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ *n'admet pas de limite finie.*

Exercice 9 *Etudier les suites*

$$u_n = \sqrt[n]{\frac{2n!}{n!n^n}} \quad et \quad v_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}.$$

Exercice 10 *Pour* $x \in [0,1]$*, on pose* $f_n(x) = n^2x^n(1-x)$*. Montrer que pour tout* $x \in [0,1]$*,* $f_n(x)$ *tend vers 0 quand* x *tend vers l'infini, mais que l'intégrale* $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ *ne tend pas vers 0.*

Exercice 11 *Quelle est la dérivée de la fonction définie sur* $]0,+\infty[$ *par* $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\ell n t}{t}\,dt$ *?*

Exercice 12 *Au moyen de la méthode de la variation de la constante, déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle*

$$(\mathcal{E}) \quad (x^2-4)y' + xy = 1$$

dans l'intervalle $]-2,2[$*.*