CONTROLE 2, MATH S2 IFIPS 2006-2007, 21.03.2007

Durée 1h 30 (matlab y compris). Documents interdits, calculatrices interdites.

Exercice 1 (cours): Soit (u_n) une suite récurrente définie comme suit:

$$u_{n+2} - 7u_{n+1} + 10u_n = 0;\ u_0 = -1;\ u_1 = 4.$$

Déterminer le terme général u_n. Trouver un équivalent de u_n de la forme Cr^n, où C, r sont des constantes réelles.

Exercice 2 a) Soit f une fonction continue croissante. Montrer que

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) \leq \int_1^n f(x)\ dx \leq f(2) + \ldots + f(n-1) + f(n)$$

(on pourrait, par exemple, écrire des sommes de Riemann convenables).

b) Appliquer la partie (a) à la fonction $\ln x$. En déduire que

$$(n-1)! \leq \frac{n^n}{e^{n-1}} \leq n!,$$

puis la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Exercice 3 Calculer, selon la valeur du paramètre a, les limites suivantes:
a)$\lim_{n\to+\infty}((n^2+1)^a - (n^2-1)^a))$;
b) $\lim_{n\to+\infty} n^a(\ln(\cos\frac{1}{n}) + 2\sin\frac{1}{n^2})$.

Exercice 4 Pour quelles valeurs du paramètre a, le système linéaire suivant a des solutions? Trouver ces solutions.

$$\begin{cases} x + 2y + z - t &= 0 \\ -2x - 2y + 3t &= a \\ 2y + z + 2t &= 1 \\ 3x + 4y + 4z - 7t &= 1. \end{cases}$$

Barême indicatif: probablement sur 14 et matlab sur 6, alors 3;4;4;3.