Université de Paris XI **L1 – Calculus Math101**
Mathématiques **1er semestre 05/06**

Premier Partiel de Mathématiques

Correction

Question de Cours

1. Supposons que f soit dérivable en x_0, alors, pour tout $x < x_0$, $x \in I$, x suffisamment proche de x_0 (il y a de tels x car I est ouvert), on a que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

car $f(x) \leq f(x_0)$. En passant à la limite, on obtient donc que $f'(x_0) \geq 0$. Pour les $x \in I$, voisins de x_0 et $x > x_0$, on a de même que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

En passant à la limite, on obtient donc que $f'(x_0) \leq 0$. Au total, on a donc bien $f'(x_0) = 0$.
2. Le maximum et le minimum de f sur cet intervalle (qui existent car f est continue sur cet intervalle fermé borné), sont atteints soit en un point $x_0 \in]0, 3[$, auquel cas $f'(x_0) = 6x_0^2 - 18x_0 + 12 = 6(x_0 - 1)(x_0 - 2) = 0$ ou aux extrémités de l'intervalle.
Le maximum et le minimum de f sont donc a trouver parmi les nombres $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$. On a

$$f(0) = 1,\ f(1) = 6,\ f(2) = 5,\ f(3) = 10$$

Le minimum de f sur l'intervalle $[0, 3]$ vaut donc 1, son maximum vaut 10.

Exercice 1

1. On a $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + x^4\epsilon(x)$ donc $\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + x^4\epsilon(x)$ et donc

$$\frac{1}{2}(\sin^2 x + 2x) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 + x^4\epsilon(x)$$

Ce qui est le DL de g en 0 à l'ordre 4. Le DL de g en 0 à l'ordre 2 est obtenu par troncature

$$\frac{1}{2}(\sin^2 x + 2x) = x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$$

2. De la même manière $\sin x + \cos x = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\epsilon(x)$ et donc

$$\ln(\sin x + \cos x) = \ln(1 + v) = v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \frac{1}{4}v^4 + v^4\epsilon(v)$$

avec $v = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\epsilon(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. On a

$$\begin{array}{rcl} v & = & x - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{24}x^4 + x^4\epsilon(x) \\ v^2 & = & x^2 - x^3 - \dfrac{1}{12}x^4 + x^4\epsilon(x) \\ v^3 & = & x^3 - \dfrac{3}{2}x^4 + x^4\epsilon(x) \\ v^4 & = & x^4 + x^4\epsilon(x) \end{array}$$

On a donc

$$\begin{array}{rcccccccl} \ln(1+v) = & x & - & \frac{1}{2}x^2 & - & \frac{1}{6}x^3 & + & \frac{1}{24}x^4 & +x^4\epsilon(x)+ \\ & & - & \frac{1}{2}x^2 & + & \frac{1}{2}x^3 & + & \frac{1}{24}x^4 & +x^4\epsilon(x)+ \\ & & & & & \frac{1}{3}x^3 & - & \frac{1}{2}x^4 & +x^4\epsilon(x)+ \\ & & & & & & & -\frac{1}{4}x^4 & +x^4\epsilon(x) \end{array}$$

et donc

$$\ln(\sin x + \cos x) = x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4 + x^4\epsilon(x)$$

Ce qui est le DL de h en 0 à l'ordre 4. Le DL de h en 0 à l'ordre 2 est obtenu par troncature

$$\ln(\sin x + \cos x) = x - x^2 + x^2\epsilon(x)$$

3. Comme $g(x) = x(1+\epsilon(x))$ et $h(x) = x(1+\epsilon(x))$, les fonctions g et h, qui s'annulent en 0, ne s'annulent pas sur un voisinage pointé de 0, car sur un tel voisinage $1+\epsilon(x) \neq 0$, $f = \frac{1}{g} - \frac{1}{h}$ est donc bien définie sur un tel voisinage.

4. On a

$$\begin{array}{rcl} f(x) = \dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{h(x)} & = & \dfrac{1}{x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)} - \dfrac{1}{x - x^2 + x^2\epsilon(x)} \\ & = & \dfrac{-\frac{3}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)}{(x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x))(x - x^2 + x^2\epsilon(x))} \\ & = & \dfrac{-\frac{3}{2} + \epsilon(x)}{(1 + \frac{1}{2}x + x\epsilon(x))(1 - x + x\epsilon(x))} \end{array}$$

Cette dernière expression tend clairement vers $-\frac{3}{2}$ lorsque x tend vers 0.

5. f admet donc un DL d'odre 2 en 0, l'équation de la tangente à f en 0 est donc $y = T(x) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{12}x$ et, comme $f(x) - T(x) = -\frac{7}{24}x^2 + x^2\epsilon(x)$, f est, au voisinage de 0, en dessous de sa tangente.

6. On a

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x}\frac{1}{1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x)} = \frac{1}{x}(1 - u + u^2 - u^3 + u^3\epsilon(u))$$

avec $u = \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x)$, qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. On a donc $u^2 = \frac{1}{4}x^2 + x^3\epsilon(x)$, $u^3 = \frac{1}{8}x^3 + x^3\epsilon(x)$ et finalement

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x}(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + x^3\epsilon(x)) = \frac{1}{x}(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + x^3\epsilon(x))$$

De même

$$\frac{1}{h(x)} = \frac{1}{x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^4 + x^4\epsilon(x)} = \frac{1}{x}\frac{1}{1 - x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + x^3\epsilon(x)} = \frac{1}{x}\frac{1}{1-w} = \frac{1}{x}(1+w+w^2+w^3+w\epsilon(w))$$

avec $w = x - \frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + x^3\epsilon(x)$, on a donc

$$\begin{array}{rcl} w & = & x - \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{2}{3}x^3 + x^3\epsilon(x) \\ w^2 & = & x^2 - \dfrac{4}{3}x^3 + x^3\epsilon(x) \\ w^3 & = & x^3 + x^3\epsilon(x) \end{array}$$

$$\frac{1}{h(x)} = \frac{1}{x}(1 + x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^3\epsilon(x))$$

En retranchant ces deux expressions, on obtient

$$f(x) = -\frac{3}{2} - \frac{1}{12}x - \frac{7}{24}x^2 + x^2\epsilon(x)$$

ce qui est ce que l'on cherche.

Exercice 2

1. La fonction g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est $g'(x) = e^x - 1$. g' est donc positive sur $[0, +\infty[$. g est donc croissante sur $[0, +\infty[$ et, On en déduit que $g(x) \geq g(0) = 1$. g est donc strictement positive sur $[0, +\infty[$.
2. En procédant de même avec f_y dont la dérivée est g, on obtient que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. D'une part $f(0) = 1 - y < 0$ et d'autre part $\lim_{x\to\infty} f_y(x) = +\infty$. On en déduit, par le théorème des valeurs intermédiaires que $f_y([0, +\infty[) = [1 - y, +\infty[$. Comme 0 appartient à ce dernier intervalle, on en déduit qu'il existe au moins une solution α_y à l'équation $f_y(x) = 0$ d'inconnue $x \in [0, +\infty[$. Cette solution est unique du fait de la stricte croissance de f_y sur cet intervalle. On peut résumer la situation dans le tableau suivant

$$\begin{array}{c|cccc} x & 0 & & \alpha_y & +\infty \\ \hline & & & & +\infty \\ & & & \nearrow & \\ f_y(x) & & & 0 & \\ & & \nearrow & & \\ & 1-y<0 & & & \end{array}$$

3. a. On a $f_y(\ln y) = y - \frac{1}{2}(\ln y)^2 - y = -\frac{1}{2}(\ln y)^2 < 0$. D'après le tableau précédent $\ln y$ est donc strictement entre α_y et 0 : $\alpha_y - \ln y > 0$.
b. La fonction f_y est continue sur $[\ln y, \alpha_y]$, dérivable sur l'intérieur de cet intervalle, on peut donc appliquer le théorème des accroissements finis pour obtenir l'existence d'un nombre c_y, compris strictement entre $\ln y$ et α_y tel que

$$(\alpha_y - \ln y)f_y'(c_y) = f(\alpha_y) - f_y(\ln y) = \frac{1}{2}(\ln y)^2$$

Comme $f'_y = g$ et que g est croissante, on a $g(c_y) > g(\ln y) = y - \ln y$. En remplaçant dans l'égalité précédente, on obtient

$$(\alpha_y - \ln y)(y - \ln y) \leq \frac{1}{2}(\ln y)^2$$

c. On a donc

$$0 \leq \alpha_y - \ln y \leq \frac{1}{2}\frac{(\ln y)^2}{y - \ln y}\frac{1}{2}\frac{(\ln y)^2}{y}\frac{1}{1 - \frac{\ln y}{y}}$$

Cette derniere quantité tend clairement vers 0 lorsque $y \to \infty$ (croissance comparée du $\ln y$ et de y) et donc $\alpha_y - \ln y \to 0$ lorsque $y \to \infty$.