IFIPS S2 **Université Paris Sud**
2007-2008

Contrôle 4

Documents et calculatrices interdits

Exercice 1 : Soient E un espace vectoriel, et $f : E \to E$ une application linéaire. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, et $P = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_E)$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On note M et M' les matrices représentant f respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Rappeler la formule reliant M, M' et P.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire, et E un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$. La restriction de f à E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}^2$ que l'on note g.

On suppose que g est injective. Peut-on en déduire l'image de f ? la dimension du noyau de f ?

On justifiera bien entendu les réponses.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 11 & -1 & 2 \\ -1 & 11 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B} := (u_1, u_2, u_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ dont les vecteurs sont définis par $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,1,-2)$ et $u_3 = (1,-1,0)$.

1) Déterminer les matrices de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, et de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique.

2) Déterminer la matrice de l'application f dans la base $\mathcal{B}$.

3) Calculer M^4 (en faisant le moins de calculs possibles...).

Exercice 4 : 1) Trouver un équivalent de $\ln(2 + \frac{1}{n})$.

2) Est ce que $\frac{1}{n}\cos(e^{-n} + e^n)$ est un $\mathcal{O}(\frac{1}{n})$?

3) Est ce que $(1 - \cos(\frac{1}{n}))$ est un $o(\frac{1}{n})$?