BASES DU RAISONNEMENT

P. Pansu

10 septembre 2006

Rappel du programme officiel

Logique, différents types de raisonnement.
Ensembles, éléments.
Fonctions et applications.
Produit, puissances.
Union, intersection, somme disjointe.
Cardinalités.
Relations.
Ensembles ordonnés, diagramme de Hasse.

1 Vocabulaire de la logique

1.1 Assertions

Les assertions du monde mathématique sont celles qui peuvent se traduire par une formule où interviennent les ensembles de nombres (entiers, réels,...), des constantes (0, 1,...), des variables (x, a,...), les opérations ($+$, $\times$,..), les relations ($=$, $\leq$,...), et les symboles $\forall$, $\exists$, $\in$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, et qui respectent la syntaxe.

Exemple 1 *Les formules* $(1 > 0)$*,* $(1 = 0)$*,* $(x > 1)$ *sont des assertions.*

Les assertions $(1 > 0)$ et $(1 = 0)$ sont complètes, elles ont une signification indépendante de tout contexte : la première est vraie, la seconde fausse.

L'assertion $(x > 1)$ n'est pas complète, car elle contient une variable libre x, et on ne peut pas répondre à la question *l'assertion* $(x > 1)$ *est elle vraie ?*, car la réponse dépend de x.

Définition 2 *Une assertion est* complète *si toutes les variables sont quantifiées par un* quantificateur $\forall$ *ou* $\exists$*.*

- $(\forall x \in E)$ se lit *quel que soit* x *appartenant à* E, ou *pour tout* x *dans* E.
- $(\exists x \in E)$ se lit *il existe un élément de* E *tel que.*

Exemple 3 $((\forall x \in \mathbf{R})(x > 1))$ *est une assertion complète. Elle est évidemment fausse, mais c'est son droit.*

1.2 Traduction

Le jeu mathématique consiste à établir si des assertions complètes sont vraies ou fausses. Il faut savoir convertir en formules mathématiques des énoncés du langage courant et inversement.

Exercice 4 *Ecrire sous forme de formule mathématique l'assertion suivante.* Pour tout rationnel strictement positif, il existe un entier strictement plus grand que lui.

Solution de l'exercice 4. *Propriété archimédienne des rationnels.*

$$(\forall x \in \mathbf{Q}) \quad ((x > 0) \Rightarrow ((\exists n \in \mathbf{N})(n > x))).$$

Exercice 5 *Traduire en langage courant l'assertion exprimée par la formule*

$$(\forall x \in \mathbf{N}) \quad (\forall x' \in \mathbf{N})$$
$$((x \neq 0) \text{ et } (x' \neq 0)) \Rightarrow (\exists y \in \mathbf{N})(\exists q \in \mathbf{N})(\exists q' \in \mathbf{N}) \quad ((y = qx) \text{ et } (y = q'x') \text{ et } (y \neq 0))).$$

Solution de l'exercice 5. *Multiple commun.*
Deux entiers strictement positifs possèdent un multiple commun non nul.

1.3 Dictionnaire

Ci-dessous, une liste de termes mathématiques avec leur description en langage courant.

Négation. C'est dire le contraire. La négation de *j'ai 18 ans* est *je n'ai pas 18 ans*. On *note* non $\mathcal{P}$ la négation de l'assertion $\mathcal{P}$.

Et. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont des assertions, ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) est l'assertion qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont toutes les deux vraies. *J'ai 18 ans et je suis étudiant à l'IFIPS.*

Ou. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont des assertions, ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) est l'assertion qui est vraie sauf si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont toutes les deux fausses. C'est donc un *ou* au sens large, non exclusif. C'est le *ou* de *mon père ou ma mère viendra me chercher à la gare* et non celui de *je dois choisir entre prendre le RER ou la voiture.*

Implication. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont des assertions, l'assertion $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ exprime l'idée que si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ doit être vraie aussi, sans qu'il y ait pour autant une relation de cause à effet. Par exemple, *j'ai mon permis de conduire* implique *j'ai plus de 18 ans*, même si ce n'est pas d'obtenir le permis de conduire qui m'a fait vieillir.

Equivalence. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont des assertions, l'assertion $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ exprime l'idée que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies simultanément. Autrement dit,

$$(\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}) \quad \text{signifie} \quad ((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \text{ et } (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})).$$

Par conséquent, démontrer une équivalence, c'est démontrer deux implications. Sauf dans des situations très simples d'application immédiate de règles, on a en général intérêt à les démontrer séparément.

Réciproque. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont des assertions. La *réciproque* de l'implication ($\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$), c'est l'assertion ($\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$). Elles sont vraies toutes les deux si et seulement si $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ est vraie.

Exercice 6 *Quelle est la réciproque de l'assertion* Tout professeur a été étudiant *?*

Solution de l'exercice 6. *Réciproque.*
Toute personne ayant été étudiant est professeur.

Contraposée. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont des assertions. On appelle l'assertion non $\mathcal{Q} \Rightarrow$ non $\mathcal{P}$ la *contraposée* de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

Proposition 7 *Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ des assertions. L'assertion* (*non* $\mathcal{Q}$) $\Rightarrow$ (*non* $\mathcal{P}$) *est synonyme de* $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

Preuve. Donnée en exercice plus loin.■

Remarque 8 *Les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ ne sont pas des abréviations à insérer dans un texte. Ils n'ont leur place que dans des formules mathématiques.*

Fin du cours $n^0 1$

1.4 Ambiguïtés du langage courant

Ci-dessous, une liste de termes du langage courant et leur traduction (parfois problématique) en formule mathématique.

Si. La phrase *les étudiants viennent voir le prof s'ils n'ont rien compris* peut avoir plusieurs sens suivant le contexte. Pour le prof surmené qui manque de temps après un cours, ça peut vouloir dire : *ne viennent me voir aujourd'hui que les étudiants qui n'ont rien compris.* Pour un prof qui travaille dans des conditions normales, ça devrait vouloir dire : *tout étudiant qui ne comprend pas devrait venir me voir.* La version speedée se traduit par

$$\text{vient me voir aujourd'hui} \quad \Rightarrow \quad \text{n'a rien compris.}$$

La version cool par

$$\text{n'a rien compris} \quad \Rightarrow \quad \text{vient me voir aujourd'hui,}$$

c'est-à-dire, la réciproque. On nage en pleine confusion.

En mathématiques, pour éviter toute confusion, *si* $\mathcal{P}$*, alors* $\mathcal{Q}$ est synonyme de $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$. $\mathcal{P}$ *si et seulement si* $\mathcal{Q}$ est synonyme de $(\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q})$.

Pour. A la question *pour quelles valeurs de a a-t-on* $a^2 < a$ *?*, je réponds *pour* $0 < a < 1$. Est-ce que ça veut dire

$$(0 < a < 1) \quad \Rightarrow \quad (a^2 < a) \text{ ?}$$

ou plutôt

$$(a^2 < a) \quad \Rightarrow \quad (0 < a < 1) \text{ ?}$$

ou

$$(a^2 < a) \quad \Leftrightarrow \quad (0 < a < 1) \text{ ?}$$

Pour être précis, je dois répondre *on a* $a^2 < a$ *si et seulement si* $0 < a < 1$.

Contraire. Traduire par négation ?

"– J'ai dit que le groupe jaune est convoqué à 14h cet après-midi.

– Non, vous avez dit le contraire, vous avez dit que c'est le groupe rouge."

Donc le contraire de $(\forall x \in \{\text{étudiants}\})((x \in \{\text{jaune}) \Rightarrow (\text{rendez-vous } = 14h))$ est $(\forall x \in \{\text{étudiants}\})((x \notin \{\text{jaune}) \Rightarrow (\text{rendez-vous } = 14h))$? Rien à voir avec une négation.

Eviter d'utiliser le mot *contraire*.

Il faut ou **Il suffit** ?

"– Comment je vais montrer que $((x^2 + x + 1 < y) \Rightarrow (\frac{1}{x^2+x+1} > \frac{1}{y}))$?

– Tu sait prendre l'inverse d'une inégalité entre nombres positifs ?

– Ben oui.

– Y faut donc que tu montres d'abord que $x^2 + x + 1$ est toujours positif."

En réalité, il *suffit* que $x^2 + x + 1 > 0$ pour que l'implication à démontrer soit vraie. En effet,

$$(\forall x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R}) \quad ((x^2 + x + 1 > 0) \Rightarrow ((x^2 + x + 1 < y) \Rightarrow (\frac{1}{x^2 + x + 1} > \frac{1}{y}))).$$

Si $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, il *suffit* que $\mathcal{P}$ soit vraie pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie, et il *faut* que $\mathcal{Q}$ soit vraie pour que $\mathcal{P}$ soit vraie. On dit parfois que $\mathcal{P}$ *est une condition suffisante pour* $\mathcal{Q}$, et que $\mathcal{Q}$ est une *condition nécessaire* pour $\mathcal{P}$.

Par exemple, *avoir au moins 18 ans* est une condition nécessaire pour *avoir le permis de conduire*, mais ce n'est pas suffisant.

Exercice 9 *Dans* $\mathbf{Q}$*,* être positif ou nul *est-il*

– *une condition nécessaire,*
– *une condition suffisante,*
– *une condition nécessaire et suffisante*

pour être un carré *? Et si on remplace* **Q** *par* **R** *? par* **C** *?*

Solution de l'exercice 9. *Condition nécessaire ou suffisante.*
Sur **Q**, c'est une condition nécessaire (car un carré est toujours positif ou nul) mais non suffisante (car 2 n'est pas le carré d'un rationnel, bien qu'il soit positif ou nul).
Sur **C** c'est une condition suffisante, puisque tout nombre complexe est le carré d'un nombre complexe, mais ce n'est pas necessaire (ça n'a même pas de sens).
Sur **R**, c'est une condition nécessaire et suffisante.

1.5 Opérations sur les assertions

On rassemble une série de recettes qui rendent les exercices en partie mécaniques.

1.5.1 Règles relatives à la négation

– non $(x < y)$, c'est $(x \geq y)$.
– Soit $\mathcal{P}(x)$ une assertion dépendant d'une variable libre x. Alors non $((\forall x \in E)\mathcal{P}(x))$, c'est $(\exists x \in E)(\text{non}\,\mathcal{P}(x))$.
– Pour toute assertion, non (non $\mathcal{P}$) $= \mathcal{P}$.

Une assertion $\mathcal{P}$ est vraie si et seulement si non $\mathcal{P}$ est fausse. On peut donc voir la négation comme une "porte logique" qui échange vrai et faux. On peut le représenter par la petite table

$\mathcal{P}$	V	F
non $\mathcal{P}$	F	V

.

Exercice 10 *Ecrire la formule $\mathcal{P}$ qui dit que le carré de tout nombre réel est positif ou nul, ainsi que sa négation.*

Solution de l'exercice 10. *Négation à un quantificateur.*

$$\mathcal{P} : (\forall x \in \mathbf{R})(x^2 \geq 0), \quad \text{non}\,\mathcal{P} : (\exists x \in \mathbf{R})(x^2 < 0).$$

Exercice 11 *Ecrire sous forme de formule mathématique l'assertion* Tout réel possède un opposé *ainsi que sa négation.*

Solution de l'exercice 11. *Négation à deux quantificateurs.*

$$(\forall x \in \mathbf{R})(\exists y \in \mathbf{R}) \quad (x + y = 0).$$

Sa négation est

$$(\exists x \in \mathbf{R})(\forall y \in \mathbf{R}) \quad (x + y \neq 0).$$

1.5.2 Règles relatives à la conjonction et

On peut le voir le *et* comme la "porte logique" qui retourne vrai exactement lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies. Cela donne la table

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$:

	V	F
V	V	F
F	F	F

.

Règles : Si $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ sont des assertions,
– ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) = ($\mathcal{Q}$ et $\mathcal{P}$),
– (($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) et $\mathcal{R}$) = ($\mathcal{P}$ et ($\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$)), ce qu'on peut donc écrire ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$) sans ambiguïté.

1.5.3 Règles relatives à la disjonction ou

On peut le voir le *ou* comme la "porte logique" qui retourne vrai exactement lorsque l'une des assertions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est vraie, ou lorsque les deux sont vraies. Cela donne la table

$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$:

	V	F
V	V	V
F	V	F

Règles : si $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ sont des assertions,
- non $(\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}) =$ (non $\mathcal{P})$ ou (non $\mathcal{Q})$,
- non $(\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}) =$ (non $\mathcal{P})$ et (non $\mathcal{Q})$,
- $(\mathcal{P}$ ou $(\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{R})) = ((\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q})$ ou $\mathcal{R})$ ce qu'on peut donc écrire $(\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{R})$,
- $(\mathcal{P}$ et $(\mathcal{Q}$ ou R$)) = ((\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q})$ ou $(\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}))$,
- $(\mathcal{P}$ ou $(\mathcal{Q}$ et R$)) = ((\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q})$ et $(\mathcal{P}$ ou $\mathcal{R}))$.

Exemple 12 *non* $(0 < x < 1) = (x \leq 0)$ *ou* $(x \geq 1)$.

Exercice 13 *Ecrire la table de vérité de l'opération qui a des assertions* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{Q}$ *associe l'assertion* (*non* $\mathcal{P}$) *ou* $\mathcal{Q}$.

Solution de l'exercice 13. *Table de* $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \mapsto$ (*non* $\mathcal{P}$) *ou* $\mathcal{Q}$.

(non $\mathcal{P}$) ou $\mathcal{Q}$:

	V	F
V	V	V
F	F	V

1.5.4 Règles relatives à l'implication

L'implication peut être vue comme la porte logique qui retourne faux exactement quand $\mathcal{P}$ est vraie mais $\mathcal{Q}$ fausse.

Cela correspond à la table

$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$:

	V	F
V	V	V
F	F	V

Proposition 14 *Quelques soient les assertions* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{Q}$*, l'assertion* $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ *est équivalente à l'assertion* (*non* P) *ou* Q. *Par conséquent, sa négation est*

$$non\,(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (P \text{ et } (non\,Q)).$$

Exercice 15 *Ecrire la négation de la formule 4 qui exprime le fait qu'un rationnel strictement positif a toujours un entier au-dessus de lui.*

Solution de l'exercice 15. *Négation d'une implication.*

$$(\exists x \in \mathbf{Q}) \quad ((x > 0) \text{ et } (\forall n \in \mathbf{N})(x \leq n)).$$

Exercice 16 *Soient* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{Q}$ *des assertions. Les assertions* $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ *et* (*non* $\mathcal{Q}$) $\Rightarrow$ (*non* $\mathcal{P}$) *sont équivalentes.*

Solution de l'exercice 7. *Contraposition.*

$$((\text{non}\,\mathcal{Q}) \Rightarrow (\text{non}\,\mathcal{P})) \Leftrightarrow (\mathcal{Q} \text{ ou } (\text{non}\,\mathcal{P})) \Leftrightarrow ((\text{non}\,\mathcal{P}) \text{ ou } \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}).$$

2 Différents types de raisonnement

Un théorème n'est rien d'autre qu'une assertion complète, dont on affirme qu'elle est vraie, en s'appuyant sur une démonstration.

Une démonstration de l'assertion $\mathcal{P}$, c'est la mise en oeuvre d'une succession de définitions, de règles ou de théorèmes connus permettant de déduire que $\mathcal{P}$ est vraie. On décrit différentes façons typiques d'organiser une démonstration.

2.1 Raisonnement direct

Exercice 17 *Pour tout rationnel strictement positif, il existe un entier strictement plus grand que lui.*

On aura besoin de l'écriture d'un rationnel sous forme de fraction *irréductible.*

Rappel 18 *Un nombre* rationnel *est le quotient de deux entiers. L'ensemble des nombres rationnels est noté* $\mathbf{Q}$. *Tout rationnel* $r \in \mathbf{Q}$ *s'écrit de manière unique* $r = \dfrac{p}{q}$ *avec* $q > 0$ *et* p *et* q *n'ont pas de diviseur commun (autre que* ± 1*).*

Solution de l'exercice 17. *Toujours plus haut.*
Soit $x \in \mathbf{Q}$. Il existe des entiers p et q avec $q > 0$ tels que $x = \frac{p}{q}$ (propriété de $\mathbf{Q}$).
Comme q est entier strictement positif, $q \geq 1$ (propriété de $\mathbf{N}$).
Alors $p = xq \geq x$ (règle).
En particulier, $p > 0$ (règle).
D'où $2p > p$ (règle).
Il vient $2p > x$ (règle).
Comme $2p \geq 0$ (règle),
on remarque que $2p \in \mathbf{N}$ (définition de $\mathbf{Z}$).
On conclut que le double du numérateur $n = 2p$ convient.

2.2 Disjonction de cas

Exercice 19 *En se ramenant au cas des rationnels positifs, montrer que pour tout rationnel, il existe un entier plus grand que lui.*

Solution de l'exercice 19. *Propriété archimédienne de* $\mathbf{Q}$.
On distingue deux cas.
Ou bien $x \leq 0$. Dans ce cas, l'entier $n = 1$ convient.
Ou bien $x > 0$. Dans ce cas, on applique l'exemple 17, qui fournit l'entier cherché.$\blacksquare$

2.3 Raisonnement par contraposée

Pour démontrer une assertion du type $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, il suffit de démontrer sa contraposée non $\mathcal{Q} \Rightarrow$ non $\mathcal{P}$.

Exercice 20 *Montrer que si* x *et* y *sont des réels distincts de 1, et si* $x \neq y$*, alors* $\frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1}$.

Solution de l'exercice 20. *Contraposition.*
La contraposée de l'énoncé est *si* x *et* y *sont des réels distincts de 1, et si* $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1}$*, alors* $x = y$. Et c'est vrai, car

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1} \Rightarrow x - 1 = y - 1 \Rightarrow x = y.$$

2.4 Raisonnement par l'absurde

Exercice 21 *Montrer que* $\sqrt{2}$ *n'est pas rationnel.*

Solution de l'exercice 21. $\sqrt{2}$ *est irrationnel.*

Par l'absurde. Supposons $\sqrt{2}$ rationnel. Alors il existe des entiers p et q sans diviseurs communs tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On l'écrit $p^2 = 2q^2$. On remarque que si p est impair, p^2 est aussi impair. Donc forcément p est pair, $p = 2p'$. Alors $q^2 = 2p'^2$. Pour la même raison, q est pair, $q = 2q'$. Cela signifie que p et q admettent 2 comme diviseur commun, contradiction. On conclut que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2.5 Utiliser un contre exemple

Pour démontrer une assertion du type $(\exists x \in E)\mathcal{P}(x)$, il suffit de donner un exemple d'un x qui convient. En passant à la négation, pour démontrer qu'une assertion du type $(\forall x \in E)\mathcal{P}(x)$ est fausse, il suffit de donner un exemple d'un x qui ne convient pas. On appelle cela un *contre-exemple* à la propriété $\mathcal{P}$.

Exercice 22 *L'assertion* tout entier positif est somme de trois carrés *est-elle vraie ? fausse ?*

Solution de l'exercice 22. *Sommes de trois carrés.*

Sachant qu'il n'y a que deux carrés non nuls inférieurs ou égaux à 7, à savoir 1 et 4, le nombre 7 n'est pas somme de trois carrés. Cela prouve que l'assertion est fausse.

Fin du cours $n^0 2$

2.6 Raisonnement par récurrence

Exercice 23 *Pour* $n \in \mathbf{N}$*, on note* $\mathcal{P}(n)$ *l'assertion* $n! \geq 2^n$*. Montrer que* $\mathcal{P}(n)$ *est vraie à partir d'un certain rang. Lequel ?*

Solution de l'exercice 23. *Récurrence.*

Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors

$$\begin{array}{rcl} (n+1)! & = & (n+1)n! \\ & \geq & (n+1)2^n \\ & \geq & 2\,2^n \\ & = & 2^{n+1}, \end{array}$$

pourvu que $n \geq 1$. Autrement dit,

$$(\forall n \in \mathbf{N}) \quad ((n \geq 1) \Rightarrow (\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))).$$

Est-ce que cela suffit à montrer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$?

$\mathcal{P}(0)$ s'écrit $1 = 0! \geq 2^0 = 1$, c'est vrai. Malheureusement, on n'a pas su démontrer l'assertion $(\mathcal{P}(0) \Rightarrow \mathcal{P}(1))$. D'ailleurs, elle est fausse. En effet,

$\mathcal{P}(1)$ s'écrit $1 = 1! \geq 2^1 = 2$, c'est faux.

$\mathcal{P}(2)$ s'écrit $2 = 2! \geq 2^2 = 4$, c'est faux.

$\mathcal{P}(3)$ s'écrit $6 = 3! \geq 2^3 = 8$, c'est faux.

$\mathcal{P}(4)$ s'écrit $24 = 4! \geq 2^4 = 16$, c'est vrai. Ouf !

On conclut que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 4$.

3 A retenir/à savoir faire

A retenir

- On s'efforce de n'écrire que des assertions *complètes.*
- Changer la nature ou l'ordre des quantificateurs change le sens de l'assertion.
- En mathématiques, le mot *si* a un sens précis.
- Attention à la traduction mathématique du mot *pour.*
- Les termes *il faut* et *il suffit* ne sont pas interchangeables.
- *Si et seulement si* recouvre deux énoncés, et requiert deux démonstrations, une implication et sa réciproque.

A savoir faire

- Déchiffrer une assertion mathématique présentant des quantificateurs.
- Traduire une phrase du langage courant en assertion mathématique.
- Ecrire la négation, la contraposée et la réciproque d'une assertion, sans les confondre.
- Rédiger un raisonnement par l'absurde, un raisonnement par récurrence.