Mathématiques

Contrôle numéro 3
Jeudi 11 mai 2006

Documents et calculatrices interdits.
barême indicatif: 2; 2; 4; 4; 3; 2; 3.

Indiquez votre nom et numéro de groupe de TD sur chaque copie.
numérotez chaque copie.

Exercice 1 Dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, on considère les trois triplets $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (-1,0,1)$ et $u_3 = (1,1,1)$. Montrer que u_1, u_2 et u_3 engendrent $\mathbf{R}^3$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbf{R}^3$. Calculer les coordonnées des vecteurs $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,0,1)$ et $v_3 = (2,-3,1)$ dans cette base.

Exercice 2 Soit $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ l'application linéaire suivante:

$$f : \mathbf{R}^4 \ni (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4, 2x_1 + x_2 - 2x_4) \in \mathbf{R}^2.$$

1) Déterminer la dimension de l'image de f.

2) En déduire la dimension du sous espace vectoriel E de $\mathbf{R}^4$ défini par:

$$E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0, \quad 2x_1 + x_2 - 2x_4 = 0\}.$$

3) Déterminer une base de E.

Exercice 3 Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ, a, b, c le système suivant:

$$\begin{cases} (1+\lambda)x + y + z &= a \\ x + (1+\lambda)y + z &= b \\ x + y + (1+\lambda)z &= c \end{cases}$$

Exercice 4 Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les réels λ tels que le système

$$AX = \lambda X, \quad X \in \mathbf{R}^3$$

admette une solution $X \neq 0$. Pour chaque $\lambda \in \mathbf{R}$ déterminer l'espace vectoriel $E_\lambda = \{X \in \mathbf{R}^3 | AX = \lambda X\}$.

Exercice 5 Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'application linéaire définie par:

$$f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 2x + z, 2y + z).$$

1) Montrer que f est bijective et calculer f^{-1}.
2) Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | 2x + y + z = 0\}$. Déterminer une base de E.
3) Déterminer une équation cartésienne de $f(E)$.

Exercice 6 Soit A la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer A^2 et A^3.
2) Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 7 Soit $\mathbf{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soit

$$f : \mathbf{R}_3[X] \to \mathbf{R}_3[X]$$

$$P(X) \mapsto P(X+1) + P(X-1) - 2P(X).$$

1) Déterminer la matrice de f dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbf{R}_3[X]$.
2) Déterminer le noyau et l'image de f.