

Mathématiques

Feuille d'exercices 4

Exercice 1 Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels. (On note $\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , et par $P_n(X)$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans \mathbf{R}).

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + a = 0, \text{ et } x + 3az = 0\} \\ E_2 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid f(1) = 0\}, \quad E_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid f(0) = 1\} \\ E_4 &= \{P \in P_n[X] \mid P' = 3\}, \quad E_5 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + \alpha y + 1 \geq 0\}. \end{aligned}$$

Exercice 2 Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y = 0\}; & E'_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid xy = 0\}. \\ E_2 &= \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x = 0, y = z\}; & E'_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = 1\}. \\ E_3 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + xy \geq 0\}; & E'_3 &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \geq 0\}. \\ E_4 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid f(1) = 0\}; & E'_4 &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid f(0) = 1\}; \\ & & E_4'' &= \{f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid f \text{ est croissante}\}. \end{aligned}$$

Exercice 3 Déterminer lesquels des ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4 sont des sous-espaces vectoriels de \mathbf{R}^3 . Calculer leurs dimensions.

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y - z = x + y + z = 0\}. \\ E_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 - z^2 = 0\}. \\ E_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid e^x e^y = 0\}. \\ E_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\}. \end{aligned}$$

Exercice 4 Montrer que l'ensemble $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \mid \exists (a, \varphi) \in \mathbf{R}^2 \quad f(x) = a \cos(x - \varphi)\}$ est un \mathbf{R} -espace vectoriel.

Exercice 5 Soient dans \mathbf{R}^3 les vecteurs $\vec{v}_1(1, 1, 0)$, $\vec{v}_2(4, 1, 4)$ et $\vec{v}_3(2, -1, 4)$.

1. Montrer que \vec{v}_1 et \vec{v}_2 ne sont pas colinéaires. Faire de même avec \vec{v}_1 et \vec{v}_3 , puis avec \vec{v}_2 et \vec{v}_3 .
2. La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est-elle libre ?

Exercice 6 On considère dans \mathbf{R}^n une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
2. (\vec{e}_1, \vec{e}_3) .
3. $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_4)$.
4. $(3\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$.

5. $(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2, \vec{e}_4, \vec{e}_2 - \vec{e}_1).$

Exercice 7 Dans \mathbf{R}^4 on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de \mathbf{R}^4 ? Si oui, en donner une base.

Exercice 8 Soient dans \mathbf{R}^4 les vecteurs $\vec{e}_1(1, 2, 3, 4)$ et $\vec{e}_2(1, -2, 3, -4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in Vect\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$? Et pour que $(x, 1, 1, y) \in Vect\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$?

Exercice 9 Soit E un espace vectoriel sur \mathbf{R} et x, y, z, t une famille libre d'éléments de E , les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $x, 2y, z.$

2. $x, z.$

3. $x, 2x + t, t.$

4. $3x + z, z, y + z.$

5. $2x + y, x - 3y, t, y - x.$

Exercice 10 Soient E et F les sous-espaces vectoriels de \mathbf{R}^3 engendrés respectivement par les vecteurs $\{(2, 3, -1), (1, -1, -2)\}$ et $\{(3, 7, 0), (5, 0, -7)\}$. Montrer que E et F sont égaux.

Exercice 11 Effectuer le produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 12 Trouver les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. De même avec

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité 3×3 . En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 14

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

(a) Calculer B^2, B^3 en déduire une formule de récurrence que l'on démontrera pour B^n , pour tout entier n .

(b) Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme et simplifier.

(c) En déduire A^n Pour tout entier n .

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout entier n , calculer A^n en utilisant $A - I_4$.

Exercice 15

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Soient $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Montrer que $AB = AC$, a-t-on $A = C$? A peut-elle être inversible ?

(b) Déterminer toutes les matrices F telles que $A \times F = O$ (O étant la matrice dont tous les coefficients sont nuls).

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B telles que $BA = I_2$.

3. Soient A et B deux matrices carrées $n \times n$ telles que $AB = A + I_n$.

Montrer que A est inversible et déterminer son inverse (en fonction de B).

Exercice 16 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Calculer A^2 et montrer que $A^2 = 2I - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1} .