Mathématiques

Devoir numéro 2

A rendre aux enseignants de TD la semaine du 3 au 7 avril 2006.

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y = 2e^x$;

2. $y'' - 3y' + 2y = x^2 + x + 1$;

3. $y'' - 3y' + 2y = e^x(x-1)$;

4. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$ et trouver la solution vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(1) = 0$.

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + 4y' + 13y = e^{-2x}\sin(3x)$$

Exercice 3 À quelle condition sur α l'équation différentielle $y'' + \alpha^2 y = 0$ admet-elle une solution réelle f telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 2$?

Exercice 4 Résoudre les systèmes linéaires suivants, d'inconnues x, y, z, en discutant suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbf{R}$:

$$\left\{\begin{array}{llllll} x & +2y & +z & = & 0 \\ x & +y & +(1+\alpha)z & = & 1 \\ x & +y & -\alpha^2 z & = & \alpha^3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llllll} \alpha x & +y & +z & = & 1 \\ x & +\alpha y & +z & = & 1 \\ x & +y & +\alpha z & = & 1 \end{array}\right.$$

Exercice 5 On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dire lesquelles des matrices $A + B$, AB, BA sont définies et calculer celles qui le sont.

Exercice 6 On considère les deux matrices de $M_3(\mathbf{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A + B$, $(A+B)^2$, A^2, B^2, AB et BA. En éduire que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.