Mathématiques

Feuille d'exercices 1

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^2 (t^4+3t^2-t)dt\,;$ (b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt\,;$ (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1}(t+1)(t+2)(t+3)dt\,;$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{5}|t-3|dt\,;$ (e) $\displaystyle\int_1^3 (t^{\frac{3}{2}}+t^{-\frac{3}{2}})dt\,;$ (f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^t}{e^t-1}dt\,;$

(g) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(\sin t+\cos t)^2 dt\,;$ (h) $\displaystyle\int_0^1 \frac{3t}{\sqrt{1+t^2}}dt\,;$

(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t\cos^2 2t dt$; (j) $\displaystyle\int_1^2 t\ln t dt\,.$

Exercice 2 Linéariser $\cos^4 x$ et calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4 t dt\,.$

Exercice 3 Quelle est l'aire limitée par les droites d'équations $y=\dfrac{x}{4}$ et $y=2x$ respectivement, et la courbe d'équation $y=\dfrac{2}{x^2}$?

Exercice 4 Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant leurs domaines de définition.

(a) $x\mapsto x^2e^x$; (b) $x\mapsto \ln x$; (c) $x\mapsto x\ln(x+1)$;
(d) $x\mapsto \sqrt{x}\ln x$; (e) $x\mapsto \arctan x$; (f) $x\mapsto x\arctan x$;
(g) $x\mapsto \ln^2 x$; (h) $x\mapsto e^x\cos x$;

Exercice 5 Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif. Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant leurs domaines de définition.

(a) $x\mapsto \dfrac{x-3}{2x^2+2x+1}$; (b) $x\mapsto \dfrac{1}{x^2-2x-3}$; (c) $x\mapsto \dfrac{x^2+1}{(x-1)(2x^2+2x+1)}$;
(d) $x\mapsto \dfrac{1}{x^2+5}$; (e) $x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{6-x^2}}$; (f) $x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$; (g) $x\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$;

Exercice 6 Calculer les intégrales suivantes à l'aide

1. d'un changement de variable d'intégration :

(a) $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{dt}{t\ln^2 t}$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\frac{t^2}{1-t^3}dt$; (c) $\displaystyle\int_{1/2}^{2}\frac{\ln t}{1+t^2}dt$ (on prend pour nouvelle variable $x=1/t$) ;

(d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{\sin t+\tan t}$ (on prend pour nouvelle variable $x=\tan(t/2)$).

2. d'un ou plusieurs changements de variables d'intégration :

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}t^2\sqrt{1-t^2}dt$ (on prend pour nouvelle variable u telle que $t=\sin u$) ;

(b) $\displaystyle\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - t^2}dt$ où R est un réel positif. Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 7

Des deux intégrales suivantes, laquelle est la plus facile à calculer ? Effectuer ce calcul.

$$\int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} dx \right) dy \quad \text{ou} \quad \int_0^1 \left(\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} dy \right) dx.$$

Exercice 8

Calculer $\int\int_D \frac{xy^2}{1+x^2} dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x \leq 2,\ \ 0 \leq y \leq 1\}$.

Exercice 9

Calculer $\int_0^1 \left(\int_0^y \frac{2(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} dx \right) dy$, puis $\int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{2(x+y)}{(1+(x+y)^2)^2} dy \right) dx$.
L'égalité était-elle prévisible ?

Exercice 10

Calculer $\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} a^x b^y dx \right) dy$, où a et b sont des réels strictement positifs, distincts et différents de 1.

Exercice 11

Pour $0 < \varepsilon < 1$, calculer $I_\varepsilon = \int\int_{D_\varepsilon} \exp\left(\frac{y}{x}\right) dxdy$,
où $D_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq y \leq x,\ \varepsilon \leq x \leq 1\}$. Quelle est la limite de I_ε lorsque ε tend vers 0 ?

Exercice 12

Calculer $\int\int_D (1-x-y) dxdy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Exercice 13

Calculer l'aire du domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \leq y \leq 2 - x^2\}$.

Exercice 14

Calculer (en utilisant les coordonnées polaires) $\int\int_D \frac{y^3}{x^2+y^2} dxdy$,
où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \leq x\}$.

Exercice 15

Calculer directement, puis à l'aide des coordonnées polaires $\int\int_D \frac{x}{x^2+y^2} dxdy$,
où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leq x \leq \sqrt{3},\ \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq x\}$.

Exercice 16

Calculer $\int\int_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \leq R^2\}$.

Exercice 17

Calculer le volume d'une pyramide de hauteur h et de base rectangle de largeur l et de longueur L.

Exercice 18

Soit $a > R > 0$. Calculer l'intégrale suivante, qui détermine le potentiel électrique créé au point $(0, 0, a)$ par la sphère de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon R chargée uniformément par une densité de charge constante ρ.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\int\int_{B(0,R)} \frac{\rho}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} dxdydz$$

Exercice 19

Déterminer et représenter l'ensemble de définition, puis calculer les dérivées partielles des fonctions définies par :

$$f_1(x, y) = \arctan(xy), \quad f_2(x, y) = \arctan(\frac{x}{y}), \quad f_3(x, y) = \exp(\frac{x}{y}) + \exp(\frac{y}{x}),$$

$$f_4(x, y) = x^2 \sin(y), \quad f_5(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad f_6(x, y) = \ln(x + y).$$

Exercice 20

a) Trouver toutes les fonctions f telles que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3y^2 + 2xy^4 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^4y + 4x^2y^3 + \cos(y)$$

Comparer $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ et $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$.

b) Mêmes questions avec:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x$$