Mathématiques

Contrôle numéro 1
Jeudi 9 Mars 2006

Exercice 1 Soit D le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x, y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$ et soit

$$I = \int_D (x + y)e^x e^y dxdy.$$

1) Calculer I à l'aide du théorème de Fubini.

2) Calculer I à l'aide du théorème de changement de variables.

Exercice 2 Soit D le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 < x,\ x^2 + y^2 > y\}$.

1) Dessiner le domaine D.

2) Calculer l'intégrale:

$$I = \int_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdx.$$

Exercice 3 Soit D le domaine $D = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z^2 + 1\}$.

Calculer le volume de D.

Exercice 4 Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x - \sin(2x)}{x(1 - \cos x)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^{\frac{1}{2}} - (1 - x)^{\frac{1}{2}} - \sin x}{2x + e^{-x} - e^x}$$

Exercice 5 Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 + x + \frac{x \ln(x)}{1-x}$.

(1) Déterminer le domaine de définition de f.

(2) Montrer que f peut être prolongée par continuité à $[0, +\infty[$ et déterminer son prolongement, que l'on notera encore par f.

(3) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer f'.

(4) Déterminer la position du graphe de f par rapport à sa tangente au point d'abscisse 1.
Indication: on pourra commencer par calculer un DL à un ordre convenable de f en $x = 1$.