Mathématiques

Feuille d'exercices 5

Systèmes linéaires

Exercice 1 Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\begin{cases} x & +y & -z & = & 2 \\ 2x & -y & +z & = & 1 \\ 4x & +y & +3z & = & 3 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 2x & +2y & -2z & +5t & = & -6 \\ 3x & & -z & +t & = & -3 \\ 2x & -y & & -3t & = & 2 \\ 2x & -y & +z & -t & = & 1 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} x & -y & -2z & = & -1 \\ -x & +3y & +3z & = & 2 \\ & 4y & +2z & = & 3 \end{cases} \qquad (S_3)\begin{cases} x & -y & -2z & = & -1 \\ -x & +3y & +3z & = & 2 \\ & 4y & +2z & = & 2 \end{cases}$$

$$(S_5)\begin{cases} x & -2y & +z & -4t & = & 1 \\ x & +3y & +7z & +2t & = & 2 \\ x & -12y & -11z & -16t & = & 3 \end{cases}$$

Exercice 2 Résoudre les systèmes linéaires suivants, d'inconnues x, y, z, en discutant suivant les valeurs du paramètre réel α :

$$(S_\pi)\begin{cases} \alpha x & +y & +\alpha z & = & 2\alpha \\ \alpha x & -\alpha y & +z & = & 2\alpha \\ \alpha x & -\alpha y & +\alpha z & = & 1+\alpha \end{cases} \qquad (S_\mathrm{e})\begin{cases} x & +2y & +z & = & 0 \\ x & +y & +(1+\alpha)z & = & 1 \\ x & +y & -\alpha^2 z & = & \alpha^3 \end{cases}$$

$$(S_\gamma)\begin{cases} \alpha x & +y & +z & = & 1 \\ x & +\alpha y & +z & = & 1 \\ x & +y & +\alpha z & = & 1 \end{cases}$$

Exercice 3 Résoudre le système suivant, en discutant suivant la valeur du paramètre réel $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$(S_{2\mathrm{i}\pi})\begin{cases} x & +(\lambda+1)y & = & 1 \\ \lambda x & +(\lambda+4)y & = & 2 \end{cases}$$

Exercice 4 a) Résoudre le système suivant, selon les valeurs de b_1, b_2, b_3, b_4 :

$$(S_{\sqrt{2}}) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & +3y & +4z & +7t & = & b_1 \\ x & +y & +z & +t & = & b_2 \\ x & +3y & +3z & +2t & = & b_3 \\ x & +3y & +4z & +5t & = & b_4 \end{array} \right.$$

b) Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Bases, équations cartésiennes, équations paramétriques

Exercice 5

a) Montrer que les vecteurs $w_1 = (1, -1, \mathrm{i})$, $w_2 = (-1, \mathrm{i}, 1)$, $w_3 = (\mathrm{i}, 1, -1)$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathbf{C}^3$ sur $\mathbf{C}$.
b) Déterminer les coordonnées de $v = (1 + \mathrm{i}, 1 - \mathrm{i}, \mathrm{i})$ dans cette base.

Exercice 6 Déterminer pour quelles valeurs du réel t, les vecteurs $u_1 = (1, 0, t)$, $u_2 = (1, 1, t)$ et $u_3 = (t, 0, 1)$ forment une base de $\mathbf{R}^3$.

Exercice 7 Trouver une base du sous-espace vectoriel F de $\mathbf{R}^4$ dans chacun des cas suivants.

1. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 | x + 2y = 0\}$;

2. F admet comme système d'équations cartésiennes

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x + 2y & = & 0 \\ x - y + z & = & 0 \end{array} \right. .$$

3. F est l'ensemble des solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x + 2y - z - t & = & 0 \\ x - y + z - t & = & 0 \\ 4x - y + 2z - 4t & = & 0 \end{array} \right. .$$

Dans chacun des cas, préciser un système d'équations paramétriques.

Exercice 8 Déterminer un système d'équations cartésiennes du sous-espace vectoriel F de E dans les cas suivants :

- (a) $E = \mathbf{R}^3$ et F est engendré par $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 1)$;
- (b) $E = \mathbf{R}^3$ et $F = \mathrm{Vect}((1, 2, -1))$.
- (c) $E = \mathbf{R}^2$ et $F = \mathrm{Vect}((1, 2))$.
- (d) $E = \mathbf{R}^4$ et $F = \mathrm{Vect}((1, 2, -1, 0), (2, -1, 0, 1), (0, 1, -1, 2))$.
- (e) $E = \mathbf{R}^4$ et $F = \mathrm{Vect}((1, -2, -1, 0), (2, -2, -1, 1), (-1, 0, -1, -2))$.
- (f) $E = \mathbf{R}^4$ et F est l'intersection des sous-espaces définis en (d) et (e).
- (g) $E = \mathbf{R}^3$ et F est la somme des sous-espaces définis en (a) et (b).

Exercice 9

On considère la famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de $\mathbf{R}^4$ suivante :

$$\mathcal{F} = \{v_1 = (1,2,0,1), v_2 = (4,4,1,2), v_3 = (2,0,1,0), v_4 = (2,2,\tfrac{1}{2},1)\}.$$

- a. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Calculer son rang. Déterminer les relations de dépendance entre les vecteurs de $\mathcal{F}$.
- b. Soit F le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par $\mathcal{F}$. Quelle est la dimension de F ? Extraire de $\mathcal{F}$ une famille libre $\mathcal{F}'$ engendrant F.
- c. On note $\mathcal{G}$ la famille génératrice de $\mathbf{R}^4$ formée des vecteurs $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ et $(0,0,0,1)$. Compléter $\mathcal{F}'$ en une base de $\mathbf{R}^4$ à l'aide de vecteurs de $\mathcal{G}$.
- d. Déterminer un supplémentaire de F.

Exercice 10

a. Soit G le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par les vecteurs $u = (1,-1,2,-2)$, $v = (4,0,1,-5)$ et $w = (3,1,-1,-3)$. Déterminer une base, la dimension et un système d'équations cartésiennes de G.
b. Dans $\mathbf{R}^4$, on considère le sous-espace $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 | x = y = x - y + z + 2t = 0\}$. Déterminer une base, la dimension et un système d'équations paramétriques de H.
c. Déterminer une base de $G \cap H$, la dimension et une base de $G + H$.
d. Déterminer un supplémentaire F de $G + H$ dans $\mathbf{R}^4$.