

Mathématiques

Contrôle numéro 2 Mercredi 5 avril 2006

Documents et calculatrices interdits
barème indicatif: 2; 8; 2; 3; 5.

Exercice 1 Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{1 - x + \ln x},$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{1}{\sin(x^{-1})}}, \quad \alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Exercice 2 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 5y &= (x+1)e^{-x}, & y'' + y' - 2y &= \cos x, \\ y'' + y' - 2y &= e^{3x} + 3e^x, & y'' + 4y &= \cos xe^x. \end{aligned}$$

Exercice 3 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y'' + y' - 2y = 0, \quad y'' + 4y = 0,$$

et déterminer la solution y qui vérifie $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 4 Soit $\omega \in \mathbf{R}$, $\omega \neq 0$ un paramètre réel. On considère l'équation différentielle avec conditions supplémentaires suivante:

$$(E) \begin{cases} y''(x) + \omega^2 y(x) = 0, \\ y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1). \end{cases}$$

Déterminer pour quelles valeurs de ω l'équation (E) admet une solution réelle non identiquement nulle.

Exercice 5 Soit E l'ensemble des fonctions de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . On rappelle que pour f, g dans E , et λ dans \mathbf{R} , les fonctions $f + g$ et $\lambda.f$ sont définies par:

$$\begin{aligned} f + g : x &\longmapsto f(x) + g(x), \\ \lambda.f : x &\longmapsto \lambda f(x), \end{aligned}$$

et que E muni de ces opérations d'addition et de multiplication par les scalaires est un espace vectoriel sur \mathbf{R} .

Les sous-ensembles de E suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels?

- $E_1 = \{f \in E \mid f(1) = 0\}$;
- $E_2 = \{f \in E \mid f(x) = a \sin x + b \cos x + cx^2, \quad a, b, c \in \mathbf{R}\}$;
- l'ensemble E_3 des fonctions croissantes sur \mathbf{R} ;
- l'ensemble E_4 des fonctions dérivables sur $[0, 1]$;
- l'ensemble E_5 des fonctions positives continues sur $[-1, 1]$.

Justifier chaque réponse, par une démonstration dans l'affirmative, par un contre-exemple dans la négative. Toute réponse non justifiée vaudra 0.