Mathématiques

Contrôle numéro 4
Mercredi 7 juin 2006

Durée: 2 heures.
Documents et calculatrices interdits.
barême indicatif: 3; 3; 3; 3; 4; 4.

Indiquez votre nom et numéro de groupe de TD sur chaque copie.
numérotez chaque copie.

Exercice 1 Déterminer la dimension et une base de l'espace vectoriel

$$E = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbf{R}^5 | x + 2y - 5z + 3t - u = 0, 2x + y - 2u = 0\}.$$

Indication: on pourra introduire une application linéaire convenable et utiliser le théorème du rang.

Exercice 2

Montrer que les sous-espaces vectoriels $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x + y + z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x - y = x + z = 0\}$ sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

Indication: pour montrer que deux sous-espaces F et G d'un espace vectoriel E sont supplémentaires, on pourra montrer que $\dim F + \dim G = \dim E$ *et que* $F \cap G = \{0\}$.

Exercice 3 On rappelle que $\mathbf{R}_3[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à 3 $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ pour $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{R}$.

Montrer que les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Vect}(1 - X + X^2, 1 + 2X - X^3)$ et $G = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \mathbf{R}_3[X] | a_0 + a_1 - a_2 - a_3 = 0, a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0\}$ sont supplémentaires dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}_3[X]$

Exercice 4 Soit $\mathbf{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à deux.

(1) Quelle est la dimension de $\mathbf{R}_2[X]$?

(2) Soient a, b, c trois nombres réels deux à deux distincts. On considère les trois polynômes:

$$A(X) = (X - b)(X - c), \quad B(x) = (X - c)(X - a), \quad C(X) = (X - a)(X - b).$$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ des nombres réels tels que:

$$\alpha A(X) + \beta B(X) + \gamma C(X) = 0.$$

Montrer que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Indication: on pourra donner à la variable X des valeurs bien choisies dans l'identité ci-dessus.

(3) Montrer que $\{A, B, C\}$ est une base de $\mathbf{R}_2[X]$.

(4) Soit P un élément arbitraire de $\mathbf{R}_2[X]$. Déterminer en fonction de P les nombres réels α, β, γ tels que:

$$P(X) = \alpha A(X) + \beta B(X) + \gamma C(X).$$

Indication: on pourra utiliser une méthode analogue à celle de la question (2).

Exercice 5 Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (-x + y, x + 2y + z)$$

. Soient $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, -1, 1)$ des vecteurs de $\mathbf{R}^3$ et $v_1 = (1, 1)$ $v_2 = (1, -1)$ des vecteurs de $\mathbf{R}^2$.

(1) Montrer que $C_3 = \{u_1, u_2, u_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $C_2 = \{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(2) On note B_3 (resp. B_2) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$). Écrire la matrice associée à f dans les bases :

(i) B_3 et B_2.

(ii) B_3 et C_2

(iii) C_3 et C_2.

Exercice 6 Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et soit I_4 la matrice identité d'ordre 4. On pose $B = A - I_4$.

(1) Calculer B, B^2, B^3, B^4. En déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) On rappelle que la formule du binôme:

$$(I_4 + C)^n = \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!} C^p$$

est valable pour les matrices $C \in M_4(\mathbf{R})$, où l'on pose $C^0 = I_4$.

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.