Mathématiques

Feuille d'exercices 6

Matrices

Exercice 1 On considère les deux matrices de $M_3(\mathbf{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A+B$, $(A+B)^2$, A^2, B^2, AB et BA. En déduire que $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Exercice 2 A quelle condition sur la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a-t-on $AB = BA$ pour toutes les matrices $B \in M_2(\mathbf{R})$?
Indication : on pourra utiliser $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 Calculer les matrices inverses des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 a) Pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on introduit la matrice $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
Calculer $A\tilde{A}$ et $\tilde{A}A$. En déduire la formule de l'inverse d'une matrice 2×2 inversible.

b) Application : calculer les inverses des matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & y \\ x & 1+xy \end{pmatrix}.$$

Applications linéaires

Exercice 5

Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Pour celles qui sont linéaires, déterminer le noyau, l'image, préciser si l'application est injective, surjective, bijective, et écrire la matrice associée dans les bases canoniques.

(a) $f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x,y) \mapsto xy$,

(b) $f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2;\ x \mapsto (0, 2x)$,

(c) $f_3 \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C};\ z \mapsto \overline{z}$ où $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel,

(d) $f_\pi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C};\ z \mapsto \overline{z}$ où $\mathbb{C}$ est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel,

(e) $f_{\sqrt{2}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ (x,y) \mapsto x+y+1$,

(f) $f_{\mathrm{i}}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ (x,y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$,

(g) $f_7\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ (x,y,z) \mapsto (x+y, x-2y+z)$,

(h) $f_8\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X];\ P \mapsto P'$,

(i) $f_{99}\colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_{n+1}[X];\ P \mapsto XP$.

Exercice 6 Dans chacun des cas suivants, déterminer s'il existe une application linéaire $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vérifiant :

(a) $f(1,-1) = (2,3)$ et $f(2,-2) = (3,2)$,

(b) $f(1,-1) = (2,3)$ et $f(1,1) = (3,2)$,

(c) $f(1,-1) = (2,3)$ et $f(3,-3) = (6,9)$.

Exercice 7 On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (x+y+z, 2x+y, 2x+z).$$

(a) Montrer que f est bijective et calculer f^{-1}.

(b) Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 2x+y+z = 0\}$. Donner une équation cartésienne de $f(F)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8 On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (x+2y-2z, 2x+y-2z, 2x+2y-3z)$$

et $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (-1,1,0)$ et $u_3 = (1,0,1)$.

(a) Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(b) Calculer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ et écrire la matrice A' de f dans la base $\mathfrak{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$. Interprétation géométrique.

(c) Trouver une matrice inversible $P \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = A'$.

Exercice 9 Soit p un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $p^2 = p$.

1. Montrer que, pour tout $x \in E$, on a $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$. En déduire que l'on a $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$.
2. Montrer que l'on a $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$. En déduire que p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Exercice 10 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases canoniques est

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 0 & \alpha-1 \\ 0 & -1 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

Déterminer, suivant la valeur de α, le rang de f_α, une base de $\Im(f_\alpha)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f_\alpha)$.

Exercice 11 Soit V un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension 3 et u un endomorphisme de V tel que $u \neq 0$ et $u^2 = 0$.

(a) Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$ et déterminer $\dim \mathrm{Ker}(u)$.

(b) En déduire qu'il existe une base de V dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$