ANALYSE EN S5 IFIPS

Y. Georgelin, revu par P. Pansu

7 septembre 2008

Chapitre 1

Compléments d'intégration

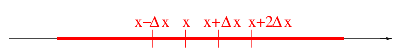
1.1 Motivation

1.1.1 Diffusion de la chaleur

On s'intéresse à la diffusion de la chaleur dans un solide homogène et isotrope. Pour simplifier, on suppose le solide unidimensionnel (fil infiniment fin), représenté par l'intervalle $[0, L]$ de l'axe réel. La température f est une fonction de la position $x \in [0, L]$ et du temps $t \in [0, T]$. A chaque instant t, pendant un temps Δt, un volume infinitésimal entre x et $x+\Delta x$ reçoit de la chaleur de ses voisins $[x - \Delta x, x]$ et $[x + \Delta x, x + 2\Delta x]$, proportionnellement à la différence de leurs températures. Par conséquent

$$f(x, t + \Delta t) = f(x, t) + \alpha(f(x - \Delta x, t) - f(x, t)) + \alpha(f(x + \Delta x, t) - f(x, t)),$$

où α est une quantité sans dimension, supposée indépendante de x et de t, car le solide est homogène.



On utilise les développements limités (de Taylor-Young)

$$f(x, t + \Delta t) = f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial t}\,\Delta t + \cdots, \quad f(x + \Delta x, t) = f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\Delta x^2 + \cdots,$$

il vient, aux restes près,

$$\frac{\partial f}{\partial t}\,\Delta t = \alpha\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\Delta x^2.$$

Cela conduit à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial t} = c\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \tag{1.1}$$

où c est homogène à un temps divisé par le carré d'une longueur. Depuis D. Poisson, cette équation est connue sous le nom d'*équation de la chaleur.*

1.1.2 Condition aux limites

On suppose le solide conducteur de la chaleur, mais entouré d'un isolant parfait. L'absence d'échanges de chaleur au voisinage immédiat de l'isolant entraîne que la température y est infinitésimalement constante, i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(L, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

1.1.3 Résolution

Pour des données particulières, l'équation 1.1 peut être résolue explicitement. Considérons l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des polynômes trigonométriques pairs de degré $\leq n$, i.e. des fonctions sur $[0, L]$ de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos(\frac{\pi x}{L}) + a_2 \cos(2\frac{\pi x}{L}) + \cdots + a_n \cos(n\frac{\pi x}{L}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\frac{\pi x}{L}).$$

Remarquer que toutes ces fonctions satisfont à la condition aux limites $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(L) = 0$. La dérivée seconde d'une fonction de $\mathcal{P}_n$ est à nouveau une fonction de $\mathcal{P}_n$. On peut donc considérer l'application A qui à un élément f de $\mathcal{P}_n$ associe $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ comme une application linéaire de $\mathcal{P}_n$ dans $\mathcal{P}_n$. Notons e_k la fonction $x \mapsto \cos(k\frac{\pi x}{L})$. Alors $e_0, \cdots, e_n$ forment une base de $\mathcal{P}_n$. Dans cette base, la matrice de A est diagonale,

$$A = \frac{\pi^2}{L^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -n^2 \end{pmatrix}.$$

Pour une fonction $f \in \mathcal{P}_n$, l'équation de la chaleur se traduit par $\frac{\partial f}{\partial t} = cAf$, c'est un système différentiel linéaire à coefficients constants, qui se résoud immédiatement, puisque A est diagonale. Si $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\frac{\pi x}{L})$, alors

$$f(x,t) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{-c\frac{\pi^2}{L^2}k^2 t} \cos(k\frac{\pi x}{L}). \tag{1.2}$$

On remarque que, lorsque t tend vers $+\infty$, $f(x,t)$ tend vers la constante a_0 : la chaleur se répartit uniformément.

1.1.4 Passage à la limite

Un polynôme trigonométrique, c'est un cas particulier de série de Fourier. En fait, une série de Fourier, c'est une limite de polynômes trigonométriques. Si

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(k\frac{\pi x}{L}),$$

alors f est la limite quand n tend vers l'infini des polynômes trigonométriques

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\frac{\pi x}{L}).$$

On sait résoudre l'équation de la chaleur avec f_n comme condition initiale, la solution est

$$f_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{-k^2\frac{\pi^2}{L^2}t} \cos(k\frac{\pi x}{L}).$$

Il faut maintenant montrer que la suite de fonctions $f_n(x,t)$ converge, quand n tend vers l'infini.

1.1.5 Conservation de la quantité de chaleur

Si f est une fonction positive sur $[0, \pi]$, qui modélise la température le long d'un fil de longueur finie, appelons *quantité de chaleur* emmagasinée dans le fil l'intégrale $\int_0^L f(x)\,dx$.

Proposition 1 *Soient $f(x,t)$ et $g(x,t)$ des fonctions continues, solutions de l'équation de la chaleur. Alors*

1. *Si $f(x,0) \geq 0$ pour tout x, alors $f(x,t) \geq 0$ pour tout x et tout $t \geq 0$.*
2. *Si $f(x,0) \geq g(x,0)$ pour tout x, alors $f(x,t) \geq g(x,t)$ pour tout x et tout $t \geq 0$.*
3. *La quantité de chaleur $\int_0^\pi f(x,t)\,dx$ est indépendante de t.*

Corollaire 2 *Soit $f(x,t)$ une solution à valeurs complexes de l'équation de la chaleur. Alors $\int_0^L |f(x,t)|\,dx \leq \int_0^L |f(x,0)|\,dx$.*

1.1.6 Distance L^1

Définition 3 *Soient f et g des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs complexes. On appelle* distance L^1 *de f à g, et on note*

$$D(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx.$$

On dit qu'une suite f_n de fonctions converge en distance L^1 *vers f si $D(f_n, f)$ tend vers 0.*

Exemple 4 *Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n$. Alors la suite de fonctions f_n converge en distance L^1 vers la fonction nulle.*

En effet, $D(f_n, 0) = \frac{1}{n+1}$ tend vers 0. On voit qu'une suite peut converger en distance L^1 sans converger en chaque point. En fait, ce qui se passe en un nombre fini de points n'a aucune influence sur la convergence L^1.

Exemple 5 Fonction discontinue qui est limite en distance L^1 de fonctions continues. *Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = |x|^{-1/2}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Alors f est la limite en distance L^1 d'une suite de fonctions continues.*

En effet, posons $f_n(x) = n^{1/2}$ si $x \in [-1/n, 1/n]$, $f_n(x) = f(x)$ ailleurs. Alors f_n est continue, et

$$\begin{aligned} D(f_n, f) &= \int_{-1/n}^{1/n} ||x|^{-1/2} - n^{1/2}|\,dx \\ &\leq 2\int_0^{1/n} x^{-1/2}\,dx \\ &= 4n^{-1/2}, \end{aligned}$$

qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Proposition 6 *Soit f une fonction deux fois continûment dérivable sur $[0,L]$ qui satisfait aux conditions aux limites $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(L) = 0$. Soient a_k les coefficients de Fourier trigonométriques de f. Alors les sommes partielles de la série de Fourier $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos(k\frac{\pi x}{L})$ convergent en distance L^1 vers f.*

1.1.7 Passage à la limite (bis)

Proposition 7 *Soit f_n une suite de fonctions qui converge en distance L^1 vers une fonction f. Soit $f_n(x,t)$ la solution de l'équation de la chaleur de condition initiale f_n. Alors pour tout t, $f_n(x,t)$ converge en distance L^1 vers une solution de l'équation de la chaleur de condition initiale f.*

Exemple 8 *Si f est deux fois dérivable sur $[0,L]$ et satisfait aux conditions aux limites $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(L) = 0$, on obtient une bonne approximation de $f(x,t)$ au moyen des sommes partielles de sa série de Fourier et de la formule (1.2).*

On a donc obtenu un procédé de résolution de l'équation de la chaleur, pour des données initiales deux fois dérivables.

Généralisation. On peut montrer que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est limite en distance L^1 de polynômes trigonométriques (qui ne proviennent pas nécessairement de sa série de Fourier). On peut donc théoriquement résoudre l'équation de la chaleur pour toute fonction continue sur un intervalle borné. On peut aussi le faire pour les limites en distance L^1 de telles fonctions, comme, par exemple, la fonction $|x|^{-1/2}$ sur $[-1,1]$. Et enfin, pour des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, pourvu qu'elles soient limites en distance L^1 de fonctions nulles en dehors d'un intervalle fermé borné, et continues sur cet intervalle.

1.1.8 Fonctions intégrables

Cela suggère la définition suivante.

Définition 9 *Une fonction f à valeurs complexes, définie sur $\mathbb{R}$, est* intégrable *si il existe une suite f_n de fonctions telles que*

1. *f_n est nulle hors d'un intervalle borné $[a_n, b_n]$.*
2. *f_n est continue sur $[a_n, b_n]$.*
3. *f est limite en distance L^1 des f_n.*

On appelle $L^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. Par construction, c'est un *espace vectoriel*, i.e., si a, $b \in \mathbb{C}$, f, $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $af + bg$ est intégrable.

Remarque 10 *Cette définition présente un cercle vicieux, puisqu'elle suppose qu'on sait déjà intégrer f. La notion appropriée est celle de* complétion *de l'espace des fonctions continues.*

Le terme *intégrable* est justifié par le fait qu'on peut intégrer ces fonctions sur $\mathbb{R}$.

Proposition 11 *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors, par passage à la limite, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$ est bien définie. C'est une application* linéaire, *i.e. si a, $b \in \mathbb{C}$,*

$$\int_{\mathbb{R}} (af(x) + bg(x))\,dx = a\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx + b\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx.$$

Remarque 12 *Toutes les fonctions bornées imaginables sont limites en distance L^1 de fonctions continues. Par conséquent,* ***on pourra admettre***[1] *que le produit d'une fonction* bornée *par une fonction intégrable est intégrable. En particulier,* ***on pourra admettre*** *qu'une fonction f est intégrable si et seulement si son module $|f|$ l'est.*

Comme on l'a vu avec l'exemple 5, il y a des fonctions non bornées qui sont intégrables. Néanmoins, l'étape essentielle pour montrer qu'une fonction est intégrable consiste à majorer astucieusement sa valeur absolue.

[1] L'énoncé correct est que le produit d'une fonction bornée *mesurable* par une fonction intégrable est intégrable.

1.1.9 A retenir

1. Une équation aux dérivées partielles linéaire de la physique, écrite dans la bonne base de fonctions, se résoud par diagonalisation d'une matrice.
2. Pour passer de conditions initiales très particulières (dimension finie) aux conditions initiales générales (dimension infinie), il faut un passage à la limite.
3. Il est important de comprendre quand on a le droit ou pas de passer à la limite.
4. Il y a une classe de fonctions d'une variable réelle, les *fonctions intégrables*, pour lesquelles les passages à la limite se passent bien.

1.2 Théorèmes fondamentaux

1.2.1 Comment vérifier qu'une fonction est intégrable ?

La définition 9 est inutilisable. Voici la recette pour vérifier que les fonctions d'usage courant sont intégrables ou non.

Théorème 1 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue sauf en un nombre fini de points $a_1, \ldots, a_k$. Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si les intégrales généralisées*

$$\int_{\to -\infty}^{\to a_1} |f(x)|\,dx, \qquad \int_{\to a_1}^{\to a_2} |f(x)|\,dx, \qquad \ldots \qquad \int_{\to a_k}^{\to +\infty} |f(x)|\,dx$$

sont convergentes. Dans ce cas,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\to -\infty}^{\to a_1} f(x)\,dx + \int_{\to a_1}^{\to a_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{\to a_k}^{\to +\infty} f(x)\,dx.$$

Exemple 13 *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ si $x \notin [-1, 1]$, $f(x) = 0$ si $x \in [-1, 1]$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.*

En effet, f a deux discontinuités, -1 et 1. f est bornée au voisinage de -1 et de 1, donc les intégrales convergent à ces bornes, à droite comme à gauche. Les intégrales $\int^{\to +\infty} x^{-2}\,dx$ et $\int_{\to -\infty} x^{-2}\,dx$ sont convergentes, donc il y a convergence aux 6 bornes.

Exemple 14 *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$, n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.*

En effet, l'intégrale $\int_{\to 0} x^{-2}\,dx$ est divergente.

Exemple 15 *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$, n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.*

1.2.2 Théorème de convergence dominée

Théorème 2 (H. Lebesgue). *Soit $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $k = 1, 2, \ldots$, une suite de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ telle que*

1. Convergence. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite $f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x)$ existe.*
2. Domination. *Pour tout k, $|f_k| \leq g$ où g est une fonction positive* indépendante de k.
3. Intégrabilité. *g est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.*

Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}$, et

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} (\lim_{k\to\infty} f_k(x))\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx.$$

Le cours et les TD contiennent d'innombrables applications de ce théorème fondamental. On ne donne qu'un exemple montrant que les hypothèses 2 et 3 sont nécessaires.

Exemple 16 *Soit f_k la fonction qui vaut 1 sur l'intervalle $[k, k+1[$ et 0 ailleurs. Alors $\lim_{k\to\infty} f_k = 0$ mais $\int_{\mathbb{R}} f_k(x)\,dx = 1$ ne tend pas vers 0.*

Ici il y a bien domination, les f_k sont majorées par la fonction g constante égale à 1, mais g n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

1.2.3 Conséquences du théorème de convergence dominée

Corollaire 17 Continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre. *Soit $f(x, s)$ une fonction à valeurs complexes, définie pour $x \in \mathbb{R}$ et pour $s \in]s_0, s_1[\subset \mathbb{R}$. On suppose que pour tout s fixé dans $]s_0, s_1[$, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $s \in]s_0, s_1[$, on pose*

$$F(s) = \int_{\mathbb{R}} f(x, s)\,dx.$$

On fait les hypothèses suivantes.

1. Continuité. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, s)$ est continue en s ;*
2. Domination. *Pour tout $s \in]s_0, s_1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x, s)| \leq g(x)$ où g est une fonction positive* indépendante de *s.*
3. Intégrabilité. *g est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.*

Alors, $s \mapsto F(s)$ est continue sur $]s_0, s_1[$, i.e.

$$\lim_{s\to u}\int_{\mathbb{R}} f(x, s)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x, u)\,dx.$$

Corollaire 18 (Dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre). *Soit $f(x, s)$ une fonction à valeurs complexes, définie pour $x \in \mathbb{R}$ et pour $s \in]s_0, s_1[\subset \mathbb{R}$. On suppose que pour tout s fixé dans $]s_0, s_1[$, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $s \in]s_0, s_1[$, on pose*

$$F(s) = \int_{\mathbb{R}} f(x, s)\,dx.$$

On fait les hypothèses suivantes.

1. Dérivabilité. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x, s)$ est dérivable par rapport à s ;*
2. Domination. *Pour tout $s \in]s_0, s_1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|\frac{\partial f}{\partial s}(x, s)| \leq g$ où g est une fonction positive* indépendante de *s.*
3. Intégrabilité. *g est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.*

Alors, F est dérivable par rapport à s, de dérivée

$$F'(s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial s}(x, s)\,dx.$$

Autrement dit,

$$\frac{d}{ds}\int_{\mathbb{R}} f(x, s)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial s}(x, s)\,dx.$$

Remarque 19 *On peut dans le corollaire 2, substituer ($z \in D \subset \mathbb{C}$, D ensemble ouvert du plan complexe) à ($s \in]s_0, s_1[\subset \mathbb{R}$). Dans ces conditions $F(z)$ est une fonction holomorphe dans D.*

1.2.4 Intégrale sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

On peut intégrer les fonctions aussi sur des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Cela ne conduit à aucune difficulté particulière.

Définition 20 *Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. La* fonction caractéristique 1_E *de E est définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$1_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On dit que E est longueur finie *si 1_E est intégrable. Sa* longueur *(appelée aussi* mesure de Lebesgue*) est l'intégrale de 1_E,*

$$\text{longueur}(E) = \int_{\mathbb{R}} 1_E(x)\,dx.$$

Définition 21 *Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur E. On dit que f est* intégrable sur E *si $1_E f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et on pose*

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} 1_E(x) f(x)\,dx.$$

Exemple 22 *Soit E un intervalle fermé borné. Une fonction continue sur E est automatiquement intégrable sur E.*

Proposition 23 Relation de Chasles. *Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Soit f une fonction intégrable sur E. Alors*

$$\int_E f(x)\,dx = \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx.$$

1.2.5 Propriétés vraies presque partout

On admettra le résultat suivant.

Proposition 24 *Un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est de longueur finie si et seulement si on peut le recouvrir par une suite d'intervalles $]a_1, b_1[$, $]a_2, b_2[$,... dont la longueur totale*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - a_k| < +\infty \tag{1.3}$$

est finie. La longueur de E est alors la borne inférieure des sommes (1.3) sur tous les recouvrements possibles.

Il existe des ensembles dont la longueur totale est nulle, mais qui ont néanmoins une infinité d'éléments. Par exemple, l'ensemble des points d'une suite. Mais il en existe aussi qui ne sont contenus dans l'ensemble des points d'aucune suite. G. Cantor en a construit un exemple fameux.

Définition 25 *On dit qu'une propriété relative à des nombres réels est vraie* presque partout *ou* pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, *si l'ensemble des réels pour lesquels elle est fausse est de longueur nulle.*

Exemple 26 *1. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et si E est de longueur nulle, alors $\int_E f(x)\,dx = 0$.*

2. Si deux fonctions intégrables sont presque partout égales, leurs intégrales sont égales.

3. Si f est intégrable, $f \geq 0$ et si $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 0$, alors f est nulle presque partout.

1.2.6 Intégrale et primitive

En intégrant une fonction intégrable, on en obtient une primitive.

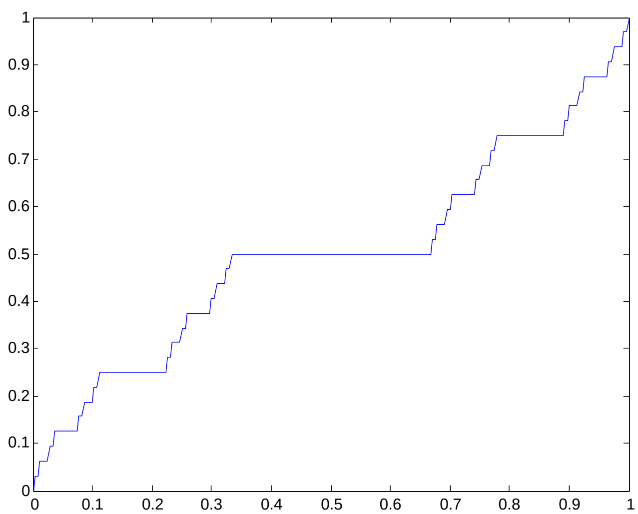
Théorème 3 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $F(y) = \int_{]-\infty,y]} f(x)\,dx$. Alors*

1. *F est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, F est dérivable en y, de dérivée $F'(y) = f(y)$.*

Remarque 27 *Il existe des fonctions continues, dérivables presque partout, mais telles que*

$$f(x) - f(a) \neq \int_{[a,x]} f'(x)\,dx.$$

G. Cantor en a construit un exemple célèbre, connu parfois sous le nom d'escalier du diable.



Cette fonction continue est dérivable presque partout, avec une dérivée nulle, mais elle n'est pas constante.

Définition 28 *Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, est dite* absolument continue *s'il existe une fonction f intégrable sur tout intervalle borné telle que pour tous x et $a \in \mathbb{R}$,*

$$F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} f(t)\,dt.$$

Remarque 29

1. *Une fonction dérivable n'est pas toujours absolument continue. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin x^{-2}, & si\ x \neq 0; \\ 0, & si\ x = 0, \end{cases}$$

a une dérivée qui n'est pas intégrable.

2. *D'après le théorème 3, une fonction absolument continue F est dérivable presque partout, et sa dérivée est presque partout égale à f. D'une manière lapidaire,* une fonction absolument continue est une fonction qui est "égale à l'intégrale de sa dérivée".

Proposition 30 Intégration par parties. *Soient F et G deux fonctions absolument continues sur $[a,b]$, de dérivées respectives f et g. On a*

$$\int_{[a,b]} F(x)g(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_{[a,b]} f(x)G(x)\,dx.$$

1.3 Intégrales multiples

1.3.1 Intégrabilité

Toutes les notions et résultats des sections précédentes s'étendent aux fonctions de plusieurs variables. Pour alléger les notations, on ne traite que les fonctions de deux variables, les définitions et énoncé généraux sont faciles à deviner à partir de ce cas particulier.

Définition 31 *Si f et g sont des fonctions continues sur un carré $[-a,a]\times[-a,a]$ et nulles en dehors,*

$$D(f,g) = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} |f(x,y)-g(x,y)|\,dx\,dy.$$

Une fonction de deux variables est intégrable sur $\mathbb{R}^2$ *si elle est limite en distance L^1 de fonctions continues sur des carrés et nulles en dehors. Par passage à la limite, on définit l'intégrale d'une fonction intégrable de deux variables.*

Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur E. On dit que f est intégrable sur E *si $1_E f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et on pose*

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}_2} 1_E(x,y) f(x,y)\,dx\,dy.$$

Définition 32 *Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$ est* d'aire finie *si 1_E est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Son* aire *(appelée* volume *en dimension 3 et* mesure de Lebesgue *en toute dimension) est*

$$aire(E) = \int_{\mathbb{R}_2} 1_E(x,y)\,dx\,dy = \int_E dx\,dy.$$

Une propriété relative à des points du plan est vraie presque partout *ou* pour presque tout point du plan *si l'ensemble des points du plan pour lesquels elle est fausse est d'aire nulle.*

Le théorème de convergence dominée et ses conséquences s'étendent aux fonctions de plusieurs variables.

1.3.2 Théorème de Fubini-Tonelli

Comme pour les fonctions d'une variable, la définition 31 est inutilisable, et il faut un théorème pour vérifier que les fonctions d'usage courant sont intégrables, c'est le théorème de Fubini-Tonelli. Le théorème permet de plus de calculer des intégrales de plusieurs manières différentes.

Théorème 4 (Fubini-Tonelli). *Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ une fonction. On fait les hypothèses suivantes.*
- *Pour presque tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $y\mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.*
- *La fonction $x\mapsto F(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\,dy$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.*

Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

Réciproquement, si f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, alors
- *Pour presque tout $y\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto f(x,y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.*
- *La fonction $y\mapsto G(y) = \int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\,dx$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.*

–
$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \right)\,dy.$$

Voici une façon moins rigoureuse mais moins lourde de formuler le théorème, dans le cas des fonctions positives.

Corollaire 33 *Soit f une fonction* positive *de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.*

- *Si l'une des trois expressions suivantes est finie*
$$I = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy, \quad II = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right)\,dx, \quad III = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx \right)\,dy,$$
les deux autres sont aussi finies, f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, et de plus $I = II = III$.
- *Si l'une de ces trois expressions n'est pas finie, les deux autres ne le sont pas non plus et f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^2$.*

1.3.3 Changement de variables

Nous nous limiterons ici au cas d'un changement de variable régulier, i.e. dont les composantes admettent des dérivées partielles continues.

Théorème 5 *Soit ϕ une application* bijective *d'un ouvert A de l'espace des $(x_1, \cdots x_n)$ sur un ouvert $B = \phi(A)$ de l'espace des $(y_1, \cdots y_n)$, définie par les n fonctions ϕ_i suivantes :*
$$y_i = \phi_i(x_1, \cdots, x_n) \qquad i = 1, \cdots n,$$
où les ϕ_i sont définies, continues, à dérivées partielles du premier ordre continues *sur A.*
Soit $J_\phi(x_1, \cdots x_n)$ le jacobien de l'application ϕ, i.e. le déterminant
$$J_\phi(x_1 \cdots x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$
Pour que $f(y_1 \cdots y_n)$ soit intégrable sur l'ensemble $\phi(A)$, il faut et il suffit que la fonction de $\vec{x}$, $f(\phi_1(x_1 \cdots x_n), \cdots, \phi_n(x_1 \cdots x_n))$, multipliée par $|J_\phi(x_1 \cdots x_n)|$, soit intégrable sur A. On a alors
$$\int_{\phi(A)} f(\vec{y})\,dy_1 \cdots dy_n = \int_A f(\phi_1(\vec{x}) \cdots \phi_n(\vec{x}))|J_\phi(\vec{x})|\,dx_1 \cdots dx_n.$$

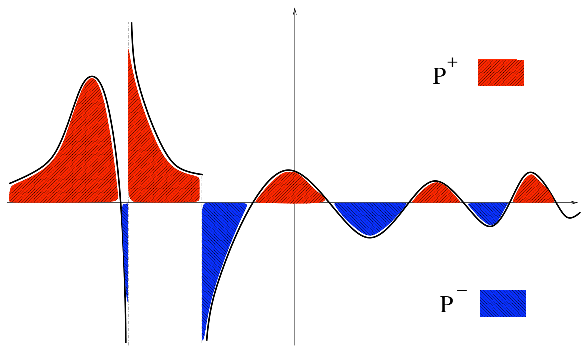
1.3.4 Lien entre intégrale et mesure

Pour les fonctions de plusieurs variables comme pour les fonctions d'une variable réelle, l'intégrale s'exprime comme volume de la région comprise entre le graphe et un plan.

Proposition 34 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une fonction. Dire que f est intégrable revient à dire que si $f = f^+ + f^-$, où f^+ (resp. f^-) est la partie positive (resp. négative) de f, alors*

- *L'ensemble $P^+ = \{(\vec{x}, y) \,|\, 0 \leq y < f^+(\vec{x})\}$, a une mesure finie pour la mesure de Lebesgue sur R^{n+1}.*
- *L'ensemble $P^- = \{(\vec{x}, y) \,|\, f^-(\vec{x}) < y \leq 0\}$, a une mesure finie pour la mesure de Lebesgue sur R^{n+1}.*

Si tel est le cas,
$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x})\,d^n x = A^+ - A^-,$$
où $A^+(A^-)$ sont les mesures de Lebesgue respectives des ensembles $P^+(P^-)$.



1.3.5 A retenir

Pour montrer qu'une fonction f d'une variable réelle est intégrable,
- On remarque qu'elle est continue sauf en un nombre finie de points.
- On étudie la convergence de l'intégrale généralisée de f sur chacun des morceaux, à chaque borne.

Pour montrer qu'une fonction f de deux variables réelles est intégrable,
- On remarque qu'elle est continue par morceaux en chaque variable.
- On étudie l'intégrabilité en une variable (méthode précédente).
- On étudie l'intégrabilité de l'intégrale par rapport à une variable comme fonction de l'autre variable (méthode précédente).
- On applique le théorème de Fubini-Tonelli.

Eventuellement, il peut être utile d'effectuer préalablement un changement de variable.

1.4 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

1.4.1 Définition

Définition 35 *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. On appelle* transformée de Fourier de f, *la fonction Ff de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, définie, pour $u \in \mathbb{R}$, par l'intégrale*

$$(Ff)(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi ux} f(x)\, dx.$$

Remarque 36
1. *Cette fonction Ff est définie pour tout $u \in \mathbb{R}$ car l'intégrale est finie pour tout u réel. En effet,*
$$|\exp(-2i\pi ux)f(x)| = |f(x)|,$$
et, par hypothèse, $|f|$ est intégrable.
2. *Les notations pour la transformée de Fourier sont nombreuses :*
$$(Ff)(u) = (TFf)(u) = \hat{f}(u) = \cdots$$
3. *Les conventions sont encore plus nombreuses, elles sont toutes de la forme*
$$(Ff)(u) = a^{-1} \int_{\mathbb{R}} \exp(-2ibxu) f(x)\, dx,$$
où les coefficients numériques a et b contiennent un nombre varié de puissances de 2 et de π. Prendre garde à la convention adoptée dans l'ouvrage que vous consultez
4. *En physique, si $f(x)$ représente l'amplitude d'un signal, $(Ff)(u)$ représente sa distribution en fréquences (ou nombres d'ondes...). C'est la* distribution spectrale *du signal f. L'ensemble des points u de $\mathbb{R}$ tels que $(Ff)(u) \neq 0$ est appelé* spectre *de f.*

Nous admettrons sans démonstration (celle-ci utilise le théorème de Fubini-Tonelli) la propriété suivante.

Proposition 37 *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors*

$$(Ff)(u) = 0 \ \forall u \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0 \text{ presque partout.}$$

Son interprétation physique est intéressante. Pour un signal intégrable, *si la fonction spectrale est nulle*, le signal est *nul physiquement* car mathématiquement nul presque partout.

1.4.2 Théorème de Riemann-Lebesgue

Théorème 6 (Riemann-Lebesgue)*. Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, alors*

1. *Ff est* bornée *sur $\mathbb{R}$.*
2. *Ff est* continue *sur $\mathbb{R}$.*
3. *$(Ff)(u)$* tend vers *0 quand u tend vers $\pm\infty$.*

Remarque 38 *En physique, ce théorème donne le comportement à l'infini de la distribution spectrale d'un signal intégrable. Il veut dire aussi que si* une seule *des trois conditions indiquées n'est pas réalisée, le signal* n'est pas *une fonction intégrable.*

1.4.3 Formule de Plancherel

Proposition 39 Formule de Plancherel*. Soient f et g des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. Alors*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)(Fg)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} (Ff)(y)g(y)\,dy. \tag{1.4}$$

1.4.4 Transformée de Fourier inverse

Le résultat principal est ici un résultat négatif.
La transformée de Fourier d'une fonction intégrable n'est pas nécessairement intégrable.

Exemple 40 *Soit $f(x) = 1$ pour $|x| \leq a$ et $f(x) = 0$ pour $|x| > a$. Alors*

$$(Ff)(u) = \frac{\sin 2\pi ua}{\pi u},$$

qui n'est pas intégrable *sur $\mathbb{R}$ (cf. Exemple 15).*

En fait, *il n'existe pas* de formule d'inversion valable *pour toute* fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$. On a cependant le théorème suivant.

Théorème 7 *Si Ff est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} Ff(u)e^{2i\pi ux}\,du.$$

Remarque 41

1. *Il y a un* sous-espace *de l'espace $L^1(\mathbb{R})$ qui admet une formule d'inversion, c'est l'espace de Schwartz S, décrit en appendice.*
2. *Il y a des* espaces différents *(l'espace des fonctions dont le carré du module est intégrable sur $\mathbb{R}$) ou* plus vastes *(les distributions tempérées) où opèrent des transformations de Fourier et qui admettent des formules d'inversion (en un sens bien spécifique cependant).*

1.4.5 Propriétés de Ff pour f intégrable sur $\mathbb{R}$

1. *Linéarité*. Pour a, $b \in \mathbb{C}$ et f, g intégrables,
$$F(af + bg) = a(Ff) + b(Fg).$$
2. *Réalité*.
   – Si f est à valeurs réelles, (Ff) a la *symétrie hermitienne* suivante
$$(Ff)(-u) = \overline{(Ff)(u)}.$$
   – Si f a la symétrie hermitienne, Ff est une fonction à valeurs réelles.
3. *Parité*. Si f est paire (impaire), (Ff) est paire (impaire).
4. *Réalité et parité*. Si f est réelle et paire, (Ff) l'est aussi.
5. *Translation et modulation*
   – Si $(\tau_z f)(x) = f(x - z)$ définit la translatée $\tau_z f$ de f d'une quantité z, on a
$$(F\tau_z f)(u) = e^{-2i\pi uz}(Ff)(u).$$
   – Pour f intégrable sur $\mathbb{R}$, posons $h_v(x) = e^{2i\pi vx}f(x)$, où $v \in \mathbb{R}$, on a
$$(Fh_v)(u) = (Ff)(u - v).$$
6. *Dilatation*. Pour f intégrable sur $\mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, posons $(d_a f)(x) = f(\frac{x}{a})$. On a
$$(Fd_a f)(u) = |a|(Ff)(au).$$

Remarque 42 *Les dilatations portant sur f et Ff vont* en sens inverse *l'une de l'autre, ce qui veut dire que si on étale f d'un facteur a^{-1}, on va contracter Ff d'un facteur a. L'interprétation physique de cette propriété mathématique est claire :* La fonction spectrale d'un signal est d'autant plus étalée que le signal est étroit.

Proposition 43 *Soit f_k, $k = 1, 2,\ldots$ une suite de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ qui convergent en distance L^1 vers f. Alors les fonctions Ff_k convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers Ff.*

1.4.6 Exemples

$f(x)$	$Ff(u)$	
$e^{-b\|x\|}$ $(b > 0)$	$\dfrac{2b}{4\pi^2u^2 + b^2}$	(1)
$\dfrac{1}{x^2 + a^2}$ $(a > 0)$	$\dfrac{\pi}{a}e^{-2\pi a\|u\|}$	(2)
e^{-ax^2} $(a > 0)$	$(\pi/a)^{\frac{1}{2}} \exp(-\pi^2u^2/a)$	(3)
$\Pi(x)$	$\dfrac{\sin(2\pi ua)}{\pi u}$ et $F\Pi(0) = 0$	(4)

où la fonction Π est la *fonction porte* définie par
$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \le a; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 44 *La transformée de Fourier $F(f)$ d'une fonction intégrable f n'est pas toujours une fonction intégrable, comme le montre l'exemple de la fonction Π.*

1.4.7 Comportement à l'infini de f et dérivabilité de Ff

On démontre facilement que si f et xf sont *intégrables*, alors Ff est *dérivable* et

$$(Ff)'(u) = (F[-2i\pi xf])(u).$$

Plus généralement, on a la proposition suivante.

Proposition 45 *Si $f, xf, \ldots, x^p f$ sont intégrables, alors (Ff) admet des dérivées jusqu'à l'ordre p et, pour $k = 1, 2, \ldots p$,*

$$(Ff)^{(k)}(u) = (F[(-2i\pi x)^k f])(u).$$

Inversement, la transformée de Fourier de la dérivée f' s'obtient au moyen de celle de f dès que f est absolument continue et f' intégrable.

Proposition 46 *Soit f une fonction absolument continue sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée f' (qui existe presque partout) est intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors*

$$(Ff')(u) = 2i\pi u(Ff)(u).$$

Généralisation : Si f est intégrable, si sa dérivée $p-1$-ème $f^{(p-1)}$ est absolument continue, et si les dérivées successives f', f'', $f^{(3)}$,$f^{(p)}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, alors, pour $k = 1, 2, \cdots p$,

$$(Ff^{(k)})(u) = (2i\pi u)^k (Ff)(u).$$

1.5 Convolution dans $L^1(\mathbb{R})$

1.5.1 Motivation

La convolution est le cadre mathématique qui permet de décrire la réponse d'un certain type de systèmes physiques à des excitations appartenant elles-mêmes à une classe bien définie.

Considérons par exemple un circuit électrique passif RLC classique. Supposons qu'à l'instant $t = 0$ on lui applique une force électromotrice $e(t)$ donnée pour toutes les valeurs de $t \geq 0$. Il s'établit un courant variable d'intensité $i(t)$. Nous supposerons que $e(t)$ et $i(t)$ sont deux fonctions nulles pour $t < 0$. On sait que dans des limites physiquement raisonnables, il existe une **réponse** donnée $i(t)$ pour chaque **excitation** $e(t)$ donnée, ce qui en fait nous définit un **opérateur** qui à chaque $e(t)$ fait correspondre $i(t)$. Pour un très grand nombre de systèmes physiques, et pas seulement le circuit RLC, on s'attend à ce que l'opérateur en question possède les propriétés suivantes

1. *Linéarité.* Si aux excitations e_1 et e_2 correspondent respectivement les réponses i_1 et i_2, à l'excitation $ae_1 + be_2$, où a, $b \in C$, correspond la réponse $ai_1 + bi_2$.
2. *Invariance par translation dans le temps.* Cela veut dire que si la réponse est i pour une excitation e, alors pour l'excitation $e_z(t) = (\tau_z e)(t) = e(t-z)$ décalée dans le temps, la réponse sera décalée d'autant, $i_z = \tau_z i$. Autrement dit, les propriétés du système ne varient pas au cours du temps.
3. *Passivité.* Cette propriété exprime le fait que si e est nulle pour $t < 0$, alors i l'est aussi.

On peut alors montrer que le système peut être décrit par une sorte de matrice M, i.e.

$$i(t) = \int_{\mathbb{R}} M_{t,t'} e(t')\, dt'.$$

L'invariance par translation dans le temps entraîne que le coefficient de matrice $M_{t,t'}$ ne dépend en fait que de $t - t'$, $M_{t,t'} = \phi(t - t')$. La formule

$$i(t) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t - t') e(t')\, dt'.$$

s'appelle un produit de convolution. La fonction ϕ, appelée *réponse impulsionnelle* du système, est l'intensité obtenue lorsque e est une impulsion unité infiniment courte. On verra en janvier comment donner un sens précis à cette phrase.

1.5.2 Définition

Définition 47 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. On appelle* convolution *de f et de g, la fonction k définie par l'intégrale*

$$k(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt.$$

On note $k = f \star g$.

Le fait que l'intégrale soit définie ne va pas de soi. C'est une conséquence remarquable du théorème de Fubini-Tonelli, voir plus loin. En effet, le produit de deux fonctions intégrables n'est pas intégrable en général.

Exemple 48 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^{-1/2}$ pour $x \in]0,1]$, et $f(x) = 0$ sinon. Alors f est intégrable sur $\mathbb{R}$, mais f^2 ne l'est pas. Autrement dit, $(f \star f)(x)$ n'est pas définie en $x = 0$, mais l'est pour tout $x \neq 0$.*

En effet, l'intégrale généralisée $\int_{\to 0} x^{-1/2}\,dx$ est convergente à la borne 0, mais $\int_{\to 0} x^{-1}\,dx$ ne l'est pas.

1.5.3 Propriétés de la fonction convolution

Proposition 49 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$.*

1. *Le nombre $(f \star g)(x)$ est défini pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.*
2. *La fonction $f \star g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.*
3. *Si f est de plus une fonction* bornée*, alors $f \star g$ est continue et bornée.*

1.5.4 Propriétés algébriques du produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$

Proposition 50 *Soient f, g et h des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$.*

1. Commutativité
$$f \star g = g \star f.$$
2. Distributivité
$$f \star (ag + bh) = a(f \star g) + b(f \star h).$$
3. Associativité
$$f \star (g \star h) = (f \star g) \star h.$$

On dit que $L^1(\mathbb{R})$ forme une algèbre pour l'addition et le produit $\star$, appelée algèbre de convolution.

1.5.5 Produit de convolution et transformation de Fourier

Théorème 8 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. Alors*

$$F(f \star g) = (Ff)(Fg).$$

Autrement dit, la transformation de Fourier F réalise un homomorphisme algébrique de l'algèbre de convolution $L^1(\mathbb{R})$ (avec les opérations $\star$ et $+$) dans[2] l'algèbre des fonctions continues et bornées qui tendent vers zéro à l'infini (opérations de multiplication et d'addition ordinaires).

[2]Inclusion *stricte*, car par exemple la fonction $f(t) = t/(1+|t|)\ell n(|t|)$ n'est l'image d'aucune fonction intégrable par F.

1.5.6 Retour sur l'équation de la chaleur

A titre d'illustration des outils introduits jusqu'à présent, on résoud l'équation de la chaleur sur un fil infiniment long, pour une donnée initiale intégrable.

Proposition 51 *Soit $f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$, une solution de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$. On fait les hypothèses suivantes.*

1. *Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, f_t est intégrable.*
2. *Pour tous $0 < T < T'$, pour $t \in [T, T']$, les fonctions $f_t : x \mapsto f(x,t)$ sont dominées par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, ainsi que leurs dérivées par rapport au temps $\frac{\partial f_t}{\partial t}$.*
3. *Lorsque t tend vers 0, f_t tend vers f_0 en distance L^1.*

Alors $f(x,t)$ est donnée par la formule intégrale suivante

$$f(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi ct}} e^{-(x-y)^2/4ct} f(y,0)\, dy \tag{1.5}$$

Réciproquement, si $x \mapsto f(x)$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, la formule (1.7) définit une solution de l'équation de la chaleur qui satisfait aux conditions 1, 2, et 3.

Interprétation. Notons A_t l'opérateur qui à une fonction intégrable f associe la fonction f_t, solution au temps t de l'équation de la chaleur de condition initiale f (lorsque $f > 0$, f modélise une distribution de température, et f_t est température obtenue après qu'on a laissé la chaleur diffuser pendant un temps t). On constate que

$$A_t f = p_t \star f,$$

comme suggéré au paragraphe 1.5.1. Toutefois, ici, le temps est fixé et la variable x est une variable d'espace. La fonction p_t ne s'interprète pas comme une réponse impulsionnelle, mais comme le résultat de la diffusion en temps t d'une quantité unité de chaleur déposée au point 0. On appelle la famille de fonctions p_t le *noyau de la chaleur*, ou la *solution fondamentale* de l'équation de la chaleur.

1.6 Supplément : L'espace de Schwartz S

1.6.1 Définition

Définition 52 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que f est un élément de l'espace S si*

- $\frac{d^m}{dx^m} f(x) = f^{(m)}(x)$ *existe pour tout $m = 0, 1, \ldots$.*
- *pour tous les entiers p et q, il existe une constante $C_{p,q}$ (dépendant de f) telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,*
$$|x^p f^{(q)}(x)| < C_{p,q}.$$

Exemple 53 *Les fonctions propres, d'énergie donnée, de l'oscillateur harmonique en mécanique quantique sont dans S :*

$$f_n(x) = H_n(x) e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

où H_n est un polynôme de degré n en x (polynôme d'Hermite).

Exemple 54 *Le noyau de la chaleur*

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$$

(voir proposition 52) appartient à S pour tout $t > 0$.

1.6.2 Propriétés

1. L'ensemble S est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
2. Les fonctions $g_{pq}(x) = x^p f^{(q)}$ sont aussi dans S pour $p, q = 0, 1, \ldots$
3. Les fonctions $g_{pq}(x) = x^p f^{(q)}(x)$ pour $p, q = 0, 1, \cdots$, sont intégrables.
4. La fonction $(Ff)(u)$ est définie pour $u \in \mathbb{R}$ et, pour $k = 0, 1, \ldots$,

$$(Ff)^{(k)}(u) = F[(-2i\pi x)^k f](u).$$

Théorème 9 *Si f appartient à S, alors $F(f)$ appartient à S. Réciproquement, tout élément de f est la transformée de Fourier d'un élément de S. Autrement dit, la transformation de Fourier est une bijection de S sur S, dont la réciproque est donnée par la formule*

$$(F^{-1}g)(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi ux} g(x)\, dx.$$

Remarque 55 *1. Pour $f \in S$, on a donc*

$$F^{-1}(Ff) = F(F^{-1}f) = f.$$

2. Il est commode de noter $F^{-1} = \bar{F}$, ce qui rappelle le changement de $+i$ en $-i$ dans la formule définissant F^{-1}, mais attention, $F^{-1}f \neq \overline{Ff}$!

Théorème 10 *Soient f et g deux fonctions de S, alors*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}} (Ff)(u)\overline{(Fg)(u)}\, du.$$

Corollaire 56 (Formule de Parseval-Plancherel). *Soit $f \in S$, alors*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}} |(Ff)(u)|^2\, du.$$

Remarque 57 *1. Le Théorème 10* n'est pas valable *pour des fonctions qui sont seulement intégrables. Dans ce cas, seule la formule de Plancherel 1.6 est vraie.*

2. En revanche, le Théorème 10 et son corollaire s'étendent aux fonctions dont le carré du module est intégrable

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 < \infty.$$

La transformée de Fourier Ff est, dans ce cas, une fonction qui est telle que

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |(Ff)(u) - g_N(u)|^2\, du = 0,$$

où

$$g_N(u) = \int_{[-N,N]} e^{-2i\pi ux} f(x)\, dx.$$

1.7 Epilogue

L'espace $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions intégrables *est insuffisant* pour les besoins de la physique.
En effet, il n'existe pas de fonction intégrable Δ telle que pour *toute fonction* de $L^1(\mathbb{R})$ on ait

$$\Delta \star f = f.$$

En d'autres termes, il *n'existe pas d'unité* pour le produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R})$.

Ce résultat est très gênant pour l'utilisateur du produit de convolution. La théorie des *distributions* résoud ce problème.

1.8 Bibliographie

- Il y a peu d'ouvrages élémentaires qui exposent la mesure et l'intégration au sens de Lebesgue, citons cependant
  - A.J. WEIR, *Lebesgue integration and measure*, Cambridge University Press.
- Ouvrages généraux sur le cours.
  - C. GASQUET, P. WITOMSKI, *Analyse de Fourier et applications,* Masson.
  - H. REINHARD, *Cours de mathématique du signal*, Dunod Université.
- Recueil d'exercices corrigés.
  - F. BAYEN, C. MARGARIA, *Problèmes de mathématiques appliquées*, Ellipses.
- Cours complet avec exercices corrigés.
  - P. BENOIST-GUEUTAL, M. COURBAGE, *Mathématiques pour la physique*, Eyrolles.
  - W. APPEL, *Mathématique pour la physique et les physiciens*, H&K Editions.

Chapitre 2

Fonctions d'une variable complexe

2.1 Objets du plan complexe

2.1.1 Le plan complexe $\mathbb{C}$

On peut définir un point z du plan complexe $\mathbb{C}$ par la donnée de deux coordonnées réelles de différentes manières.

Par exemple

$$z = x + iy \text{ où } x,\, y \in \mathbb{R}$$

ou bien encore

$$z = \rho e^{i\theta}$$

avec $\rho \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ à $2k\pi$ près.

On a donc $x = \rho \cos\theta$, $x = \rho \sin\theta$. Rappelons aussi que $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$ et que

$$z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ et } y = 0.$$

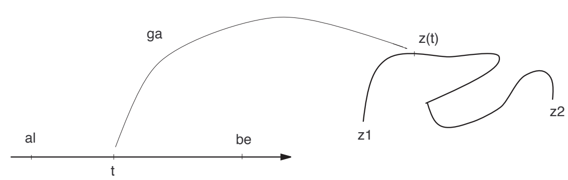
Remarque 58 *On* ne doit pas *utiliser les relations d'ordre $>$ et $<$ pour deux nombres complexes quelconques.*

2.1.2 Disques

Disque ouvert : $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - a| < r\}$.
Disque fermé : $\bar{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - a| \leq r\}$.

2.1.3 Chemins

Un chemin $L(z_1, z_2)$ du plan complexe peut être caractérisé par une fonction γ à valeurs complexes $z(t) = \gamma(t)$ du paramètre réel $t \in [\alpha, \beta]$. La fonction γ est continue en t, à dérivée en t continue par morceaux .



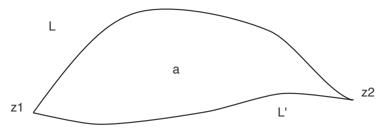
Remarque 59 *1. On peut considérer avec profit une image en terme de cinématique du point matériel dans le plan : on considère que $z(t)$ représente la position à l'instant t d'un point mobile M. Le point M est autorisé à un changement brusque de direction en certains points de sa trajectoire, en dehors de ces points la vitesse est une fonction continue.*

2. On peut avoir $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ pour des temps t_1 et t_2 différents.

2.1.4 Chemins homotopes

Deux chemins L et L' ayant mêmes extrémités sont dits *homotopes* s'il est possible de les déformer l'un en l'autre d'une manière continue (intuitivement : sans les déchirer à aucun moment au cours de cette déformation).

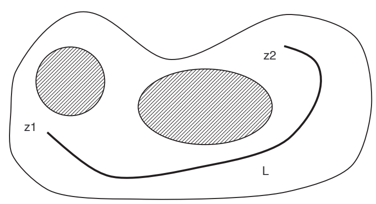
Remarque 60 *Cette dernière opération si elle est toujours possible dans $\mathbb{C}$ tout entier, n'est pas toujours possible dans $\mathbb{C} - \{a\}$.*



2.1.5 Domaine connexe

C'est un ensemble D de points du plan complexe $\mathbb{C}$ tels que

1. Chaque point z_0 de D peut être le centre d'un *disque ouvert* entièrement contenu dans D.
2. Deux points quelconques z_1 et z_2 de D peuvent être reliés entre eux par un chemin L entièrement contenu dans D.



2.1.6 Domaine simplement connexe

C'est un domaine connexe D où deux chemins quelconques joignant deux points arbitraires z_1 et z_2 de D sont homotopes tout en restant dans D.

Exemple 61 *Un disque ouvert est simplement connexe alors que le domaine précédent ne l'est pas.*

2.2 Séries entières

2.2.1 Définition

Les polynômes à coefficients complexes $z \mapsto \mathcal{P}(z) = a_0 + a_1 z + \cdots a_d z^d$ peuvent être vus comme des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On a envie de passer des sommes finies aux sommes infinies.

Définition 62 *On appelle* série entière *une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ de la forme*

$$f_n(z) = a_n z^n.$$

On la note $\sum a_n z^n$.

Exemple 63 *On appelle* série exponentielle *la série entière de terme général $z^n/n!$, $n \geq 0$.*

2.2.2 Rayon de convergence

Théorème 11 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière. Il existe un nombre* $R \in [0, +\infty]$ *tel que*

1. *Si* $|z| < R$*, la série* $\sum a_n z^n$ *est absolument convergente.*
2. *Si* $|z| > R$*, la série* $\sum a_n z^n$ *est divergente.*

Définition 64 *On appelle le nombre fourni par le théorème 11 le* rayon de convergence *de la série entière* $\sum a_n z^n$*. Le disque* $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < R\}$ *s'appelle le* disque de convergence *de la série entière* $\sum a_n z^n$*.*

Exemple 65 *Le rayon de convergence de la série entière* $\sum z^n$ *est égal à 1. Sur le disque de convergence, la somme de cette série vaut* $\dfrac{1}{1-z}$*.*

En effet, $R \leq 1$ car la série diverge en $z = 1$. D'autre part, elle converge pour tout z tel que $|z| < 1$, donc $R \geq 1$. On conclut que $R = 1$. L'identité remarquable

$$1 + z + \cdots + z^{N-1} = \frac{1 - z^N}{1 - z}$$

montre que si $|z| < 1$, les sommes partielles de la série convergent vers $\dfrac{1}{1-z}$.

Exemple 66 *Le rayon de convergence de la série exponentielle est égal à* $+\infty$*.*

En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on peut appliquer le critère de d'Alembert au module $|z^n/n!|$.

2.2.3 Dérivation terme à terme

Définition 67 *Soit* $z_0 \in \mathbb{C}$*, soit* $r > 0$*. Soit* f *une fonction définie sur le disque de centre* z_0 *et de rayon* r *dans* $\mathbb{C}$*. On dit que* f *est* dérivable au sens complexe *s'il existe* $\ell \in \mathbb{C}$ *tel que*

$$\lim_{h \to 0} |\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - \ell| = 0.$$

Le nombre ℓ *s'appelle la* dérivée *de* f *en* z_0*, notée* $f'(z_0)$*.*

Exemple 68 *Un polynôme* $z \mapsto \mathcal{P}(z) = a_0 + a_1 z + \cdots a_d z^d$ *est dérivable au sens complexe, de dérivée* $\mathcal{P}'(z_0) = a_1 + 2a_2 z_0 + \cdots + d a_d z_0^{d-1}$*.*

Théorème 12 *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière dont le rayon de convergence n'est pas nul. Alors sa somme* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *est dérivable au sens complexe sur le disque de convergence, et sa dérivée* f' *s'obtient en dérivant terme à terme,*

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

2.2.4 Séries de Laurent

Définition 69 *Une* série de Laurent*, c'est une série de fonctions de la forme* $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$*, i.e. une série de puissances positives et négatives de* z*.*

Pour que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ converge, il faut et il suffit que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (1/z)^n$ convergent. Par conséquent, une série de Laurent possède une *couronne de convergence* $A = \{R_1 < |z| < R_2\}$. Le théorème de dérivation terme à terme (Théorème 12) s'étend aux séries de Laurent.

2.3 Fonctions holomorphes dans un domaine

2.3.1 Définition

Soit $z = x + iy \in D$ et $z \mapsto f(z) \equiv f(x + iy)$ une fonction définie pour $z \in D$.

Définition 70 *La fonction f est* holomorphe dans *D,* si l'une des trois *conditions suivantes (I, II ou III) est satisfaite*

I. *La fonction f est dérivable au sens complexe* en tout point *z_0 de D.*

II. *Si on décompose $f(x, y)$ en parties réelle $P(x, y)$ et imaginaire $Q(x, y)$*

$$f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

1. *Les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont continues en tout point $z = x + iy$ de D.*
2. *Les dérivées partielles $P'_x \quad P'_y \quad Q'_x \quad Q'_y$* existent *et sont* continues *en x et y en tout point de D.*
3. *Les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ satisfont aux* conditions de Cauchy-Riemann *en tout point de D.*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 0$$

III. *Pour tout $z_0 \in D$, la fonction $h \mapsto f(z_0 + h)$ est égale, au voisinage de 0, à la somme d'une série entière de rayon de convergence non nul*

$$f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0)h^n.$$

Remarque 71 1. *Les propriétés* **I**, **II** *et* **III** *sont équivalentes* seulement *lorsqu'on considère un domaine D. Elles ne sont plus équivalentes si on ne considère* qu'un seul point. *On dit que ce sont des propriétés* localement *équivalentes mais pas ponctuellement.*

2. *Les conditions de Cauchy-Riemann seules (cf. la définition II) n'assurent pas l'holomorphie.*
3. *La condition III s'appelle traditionellement condition* **d'analyticité**.

Proposition 72 1. *Une fonction holomorphe dans D est continue en tout point de D.*

2. *Une fonction holomorphe dans D est bornée sur tout disque fermé (plus généralement une union finie de tels disques) contenu dans D.*

2.3.2 Exemples de fonctions holomorphes

1. $z \mapsto z$.
2. $z \mapsto \mathcal{P}(z)$ où $\mathcal{P}$ est un polynôme en z.
3. $z \mapsto e^{az} = 1 + az + \frac{1}{2}(az)^2 + ... + \frac{1}{n!}(az)^n + ...$, où $a \in \mathbb{C}$.
   Ces trois dernières fonctions sont holomorphes dans tout le plan complexe.
4. $z \mapsto \frac{1}{z}$, qui est holomorphe dans $\mathbb{C} - \{0\}$.
5. $z \mapsto \frac{\mathcal{P}(z)}{\mathcal{Q}(z)}$, où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont des polynômes en z, est holomorphe dans $\mathbb{C}$ privé des racines de l'équation $\mathcal{Q}(z) = 0$.
6. La dérivée p-ème $f^{(p)}$ d'une fonction f holomorphe dans D est holomorphe dans D. (En déduire que $a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$).

2.3.3 Propriétés algébriques des fonctions holomorphes

Supposons données deux fonctions $z \mapsto f(z)$ et $z \mapsto g(z)$ holomorphes dans un domaine commun D du plan complexe. On a alors

1. $af(z) + bf(z)$ qui est holomorphe dans D pour a et $b \in \mathbb{C}$.
2. $f(z)g(z)$ est holomorphe dans D.
3. $\frac{f(z)}{g(z)}$ est holomorphe dans D privé des points de D où $g(z) = 0$.
4. (Loi de composition des fonctions holomorphes) Soient $z \mapsto f_1(z)$ holomorphe dans D_1 et $z \mapsto f_2(z)$ holomorphe dans D_2 et supposons que l'image $f(D_1)$ soit contenue dans D_2, on a alors : $z \mapsto f_2(f_1(z))$ qui est holomorphe dans D_1.

2.4 Intégrales le long de chemins du plan complexe

2.4.1 Définition

Définition 73 *Soit L : $[\alpha, \beta] \to \gamma(t)$ un chemin du plan complexe. Soit $z \mapsto f(z)$ une fonction de la variable complexe z, qu'on suppose holomorphe dans un domaine D contenant le chemin L. On appelle* intégrale de f le long de L, *la quantité notée $\int_L f(z)\,dz$ donnée par*

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{[\alpha,\beta]} f(\gamma(t))\frac{d\gamma(t)}{dt}\,dt.$$

Remarque 74 *En décomposant $f(z)$ en partie réelle et imaginaire*

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

de même pour $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. On pourra encore écrire $\int_L f(z)\,dz$ sous la forme d'une intégrale curviligne dans le plan des variables réelles x et y,

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L P(x, y)\,dx - Q(x, y)\,dy + i\int_L P(x, y)\,dy + Q(x, y)\,dx$$

Il est très instructif de considérer l'analogie mécanique suivante. On peut dire que $\int_L f(z)\,dz$ représente le travail accompli par la force $f(z)$ appliquée sur un point mobile se trouvant au point $z(t)$ à l'instant t sur la trajectoire L, lorsqu'il parcourt tout le chemin L avec la vitesse $\frac{d\gamma(t)}{dt}$.

Proposition 75 *L'intégrale $\int_L f(z)\,dz$ est* indépendante *de la paramétrisation prise pour décrire L.*

Ceci veut dire que si $t' \in [\alpha', \beta'] \to z(t') = \mu(t')$ est une autre paramétrisation équivalente [1] de L,

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{[\alpha,\beta]} f(\mu(t'))\frac{d\mu(t')}{dt'}\,dt' = \int_{[\alpha,\beta]} f(\gamma(t))\frac{d\gamma(t)}{dt}\,dt.$$

L'analogue en mécanique du point de cette propriété n'est autre que l'invariance, par rapport à la vitesse du point mobile, du travail accompli par une force appliquée sur ce point lors de son déplacement le long d'un chemin donné.

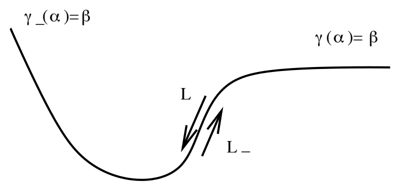
Proposition 76 *Soit L_- un chemin identique à L mais décrit en sens inverse par la paramètrisation*

$$t \in [\alpha, \beta] \to z(t) = \gamma_-(t) \in L_-$$

avec $\gamma_-(\alpha) = \gamma(\beta)$ et $\gamma_-(\beta) = \gamma(\alpha)$, alors

$$\int_L f(z)\,dz = -\int_{L_-} f(z)\,dz.$$

[1] C'est à dire que $t' = \Phi(t)$ et $\gamma(t) = \mu(\Phi(t))$ où Φ est une fonction continue croissante à dérivée continue par morceaux, appliquant de façon bijective $[\alpha, \beta]$ sur $[\alpha', \beta']$.



Proposition 77 (Formule de majoration). *Soit f holomorphe dans un domaine connexe D et $L: \quad [\alpha,\beta] \to z(t)$ un chemin contenu dans D. Alors*

$$|\int_L f(z)dz| \leq \lambda(L) \sup_{z\in L} |f(z)|,$$

où $\lambda(L)$ est la longueur de L.

Proposition 78 *Soit $f(z)$ holomorphe dans un domaine connexe D et $L: \quad [\alpha,\beta] \to z(t)$ un chemin contenu dans D. On a alors*

$$\int_L f'(z)\, dz = f(z(\beta)) - f(z(\alpha)).$$

2.4.2 Les fonctions $z \mapsto \log z$, $z \mapsto \mathrm{Log} z$ et $z \mapsto z^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{C}$

Définition des fonctions "logarithme complexe"

Considérons la fonction $u \to \frac{1}{u}$ définie et holomorphe sur le domaine connexe (mais non simplement connexe) $\mathbb{C} - \{0\}$. Soit d'autre part $L(z)$ un chemin issu du point $u = 1$ situé sur l'axe réel et allant jusqu'au point $u = z \in \mathbb{C} - \{0\}$ en évitant le point $u = 0$. Considérons l'intégrale dépendant de z

$$F(z) = \int_{L(z)} \frac{1}{u}\, du$$

A-t-on ainsi défini une fonction $z \mapsto F(z)$ sur $\mathbb{C} - \{0\}$? La réponse est négative car en prenant $L(z) = \Gamma$, le cercle unité centré en 0 on aurait d'après l'exemple fondamental

$$F(e^{2i\pi}) = 2i\pi.$$

Cependant le point $z = e^{2i\pi}$ étant confondu avec le point $z = 1$ on devrait avoir

$$F(e^{2i\pi}) = F(1) = 0,$$

d'où la contradiction.

En revanche, l'application $z \mapsto F(z)$ est bien une fonction définie sur $\mathbb{C} - \Delta(\alpha)$ où $\Delta(\alpha)$ est une demi-droite issue de l'origine faisant un angle α avec l'axe réel. En effet, le chemin $L(z)$ ne peut alors accomplir un tour complet autour du point 0. On évite donc la situation précédente. Il est traditionnel d'appeler chacune de ces différentes fonctions des *déterminations du logarithme.*

La fonction Log ou détermination principale du logarithme

Elle est définie par $\mathrm{Log} z = F(z)$ où

$$F(z) = \int_{L(z)} \frac{1}{u} du$$

avec $z \in \mathbb{C} - \Delta_-$ où Δ_- est la demi -droite des réels négatifs ou nuls.

Proposition 79 1. *La fonction Log est holomorphe en z pour $z \in \mathbb{C} - \Delta_-$.*

2. *Pour $z = x \in]0,\infty[$ on a $\mathrm{Log} z|_{z=x} = \ell n x$.*
3. *$\frac{d}{dz}\mathrm{Log} z = \frac{1}{z}$ pour $z \in \mathbb{C} - \Delta_-$.*
4. *Si $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in]0,\infty[$ et $\theta \in]-\pi,+\pi[$,*

$$\mathrm{Log} z = \ell n \rho + i\theta,$$

où $\ell n(x)$ représente le logarithme népérien de x.

Une autre fonction $\log z$

Elle est définie par $\log z = F(z)$ où

$$F(z) = \int_{L(z)} \frac{1}{u} du$$

avec $z \in \mathbb{C} - \Delta_+$ où Δ_+ est la demi droite des réels positifs ou nuls.

(On remarque que 1 n'appartient pas à $L(z)$, mais 1 est de longueur nulle.)

On peut démontrer les propriétés suivantes de cette fonction log.

1. Cette fonction log est holomorphe en z pour $z \in C - \Delta_+$.
2. Pour $z = x \in]0, \infty[$ on a pour $\epsilon > 0$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \log(x + i\epsilon) = \ell n x.$$

   On en déduit

$$\lim_{\epsilon \to 0} \log(x - i\epsilon) = \ell n x + 2i\pi.$$

3. $\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z}$ pour $z \in \mathbb{C} - \Delta_+$.
4. Si $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in]0, \infty[$ et $\theta \in]0, 2\pi[$,

$$\log z = \ell n \rho + i\theta.$$

Propriétés communes aux déterminations de $\log z$

1. Pour z_1 et z_2 à l'intérieur du domaine d'holomorphie de la fonction log considérée

$$\int_{L(z_1,z_2)} \frac{1}{z}\, dz = \log(z_2) - \log(z_1),$$

   pour tout chemin $L(z_1, z_2)$ allant de z_1 vers z_2 tout en restant dans le domaine d'holomorphie de la fonction log considérée.
2. $e^{\log z} = z$ pour $z \in \mathbb{C} - \Delta_+$; $e^{\mathrm{Log} z} = z$ pour $z \in \mathbb{C} - \Delta_-$.
3.

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2 + 2ik\pi, \quad k \in Z,$$
$$\mathrm{Log} z_1 z_2 = \mathrm{Log} z_1 + \mathrm{Log} z_2 + 2im\pi, \quad m \in Z$$

   avec en général $k \neq m$.

Exercice 80 *Calculer* $\mathrm{Log} z_1 z_2$ *pour* $z_1 = z_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. *Que vaut* m *dans ce cas ?*

Les fonctions $z \mapsto z^\alpha$ **pour** α ***complexe***

Remarquons qu'il ne suffit pas d'écrire "z^α" pour définir la fonction $z \mapsto z^\alpha$ en tant que fonction holomorphe en z lorsque l'exposant α est un nombre complexe. La seule façon simple pour définir la fonction en question est de l'exprimer à l'aide des fonctions logarithmes. Lorsqu'on a défini une fonction logarithme, on peut définir $z \mapsto z^\alpha$ par la formule

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}$$

où log désigne la fonction $z \mapsto \log z$ choisie.

Le domaine de définition et d'holomorphie de $z \mapsto z^\alpha$ est donc pour α complexe quelconque, celui de la fonction log qu'on a choisie : le plan complexe $\mathbb{C}$ privé d'une demi-droite particulière.

Cependant, pour des valeurs particulières de α le domaine d'holomorphie de $z \mapsto z^\alpha$ est plus grand que celui donné par le domaine de la fonction log considérée. On a en particulier

1. Lorsque $\alpha = m$ entier positif ou nul, la fonction $z \mapsto z^m$ peut être définie et holomorphe sur tout le plan complexe $z \in \mathbb{C}$.
2. Lorsque $\alpha = -n$ où n est entier positif, la fonction $z \mapsto \frac{1}{z^n}$ peut être définie et holomorphe pour $z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Exercice 81 *La fonction*

$$z \mapsto i \arg z = \log z - \ell n|z|$$

est-elle holomorphe ?

2.4.3 Théorème de Cauchy

Définition 82 *Un chemin ayant ses extrémités confondues est un* lacet*, on dit aussi souvent* circuit *ou* contour*.*

Théorème 13 *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine simplement connexe D, soit C un circuit entièrement contenu dans D. Alors*

$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

Corollaire 83 *Supposons que L et L' soient deux chemins contenus dans un domaine connexe D, ayant leurs deux extrémités z_1 et z_2 communes et qui sont homotopes entre eux dans D (voir figure). Si f est holomorphe dans D,*

$$\int_L f(z)\, dz = \int_{L'} f(z)\, dz.$$

D'une manière plus générale,

Corollaire 84 *Si f est holomorphe dans un domaine D contenant deux circuits C et C' pouvant être déformés l'un dans l'autre d'une manière* continue *en restant dans D, alors*

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{C'} f(z)\, dz.$$

2.5 Théorie de Cauchy

C'est l'étude des propriétés des intégrales de fonctions holomorphes sur des chemins contenus dans le domaine d'holomorphie de ces fonctions.

2.5.1 Exemple fondamental

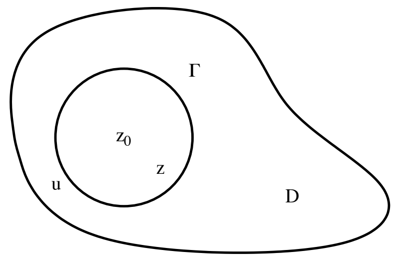
Proposition 85 *Pour $m \in Z$ et $a \in \mathbb{C}$, considérons la fonction de la variable complexe $z \mapsto \frac{1}{(z-a)^m}$. C'est une fonction définie et holomorphe sur le domaine connexe (mais non simplement connexe) $D = \mathbb{C} - \{a\}$. Considérons d'autre part un circuit Γ constitué par un cercle de rayon r centré au point a. Alors*

$$\int_\Gamma \frac{1}{(z-a)^m} dz = \begin{cases} 0 & si\ m \neq 1, \\ 2i\pi & si\ m = 1. \end{cases}$$

2.5.2 La formule intégrale de Cauchy

Théorème 14 *Soit f une fonction holomorphe dans un domaine connexe D. Considérons un cercle Γ contenu dans D et centré en z_0 (on le supposera parcouru dans le sens trigonométrique). Soit un point z à* l'intérieur *de Γ. On peut exprimer $f(z)$ en fonction des valeurs $f(u)$ de f sur Γ,*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \frac{f(u)}{u-z}\, du.$$



Remarque 86 *On peut remplacer Γ par tout autre circuit obtenu par déformation continue de Γ et gardant z en son intérieur, à condition de rester dans D (Corollaire 84).*

Exercice 87 *Exprimer les coefficients a_n (cf. Définition 71) à l'aide de l'intégrale de $f(z)/(z-z_0)^{n+1}$ sur Γ.*

2.6 Calcul des résidus.

2.6.1 Résidu

Supposons que la fonction $z \mapsto f(z)$ soit définie et holomorphe dans un domaine connexe (mais non simplement connexe) de la forme $D - \{a\}$ Supposons que pour z appartenant au disque ouvert $0 < |z-a| < \rho$ (*disque privé du point a*) la fonction f soit développable en une série de Laurent convergente de la forme

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

(sur la couronne $0 < |z-a| < \rho$ de rayon intérieur nul).

Alors, pour un cercle Γ de centre a et de rayon $r \in]0, \rho[$, contenu dans $D - \{a\}$

$$\int_{\Gamma} f(z)\, dz = 2i\pi c_{-1}.$$

Définition 88 *Le nombre complexe c_{-1} s'appelle* le résidu de f au point a *et se note*

$$c_{-1} = Rés(f, a).$$

Exemple 89 *Soit f une fonction holomorphe au voisinage de 0, telle que $f(0) \neq 0$. Alors la fonction définie par $g(z) = f(z)/z$ a un résidu en 0 qui vaut $f(0)$.*

En effet, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, alors $g(z) = \dfrac{a_0}{z} + a_1 + a_2 z + \cdots + a_{n+1} z^n + \cdots$.

Définition 90 *On dit que f possède un* pôle d'ordre $N \geq 1$ *en $z = a$ lorsque son développement en série de Laurent commence à l'ordre $n = -N$,*

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{+\infty} c_n (z-a)^n,$$

avec $c_{-N} \neq 0$.

Lorsque le pôle est d'ordre $N = 1$ en $z = a$, on dit que le pôle est simple.

Exemple 91 *Soit* $f(z) = \dfrac{\mathcal{P}(z)}{\mathcal{Q}(z)}$ *une fraction rationnelle. Alors chaque racine de multiplicité* m *de* Q *est un pôle d'ordre* m *de* f.

Si la dénominateur $\mathcal{Q}$ n'a que des racines simples, alors f n'a que des pôles simples.

Proposition 92 *Soit* f *une fonction qui possède un pôle simple en* a. *Le résidu de* f *en* a *est donné par la formule*

$$c_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

2.6.2 Théorème des résidus

Théorème 15 *Soit* $z \to f(z)$ *une fonction holomorphe dans un domaine connexe* $D' = D - \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *où* D *est supposé simplement connexe, les* a_j *sont en nombre fini. On note* $Rés(f, a_j)$ *le résidu de* f *en* a_j. *Considérons un chemin fermé* C *contenu dans* D' *et entourant* k_j *fois chaque point* a_j. *Alors*

$$\int_C f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{j=1}^{n} k_j Rés(f, a_j).$$

2.6.3 Lemmes de Jordan

Le théorème des résidus permet de calculer de nombreuses intégrales par la méthode dite *"des résidus"*. Cependant, pour mener à bien les calculs il est indispensable de connaitre le comportement de $\int_{\Gamma(R)} f(z)\,dz$ où $\Gamma(R)$ est un arc de cercle d'ouverture constante et $R \to \infty$ (même question pour $\Gamma(r)$ et $r \to 0$). On a pour cela les deux lemmes suivants dits *lemmes de Jordan.*

Lemme 93 *On suppose que pour* z *appartenant à une portion de disque centré en* 0 *et d'ouverture* $\theta_2 - \theta_1$,

- *on puisse trouver pour* $|z| = r < r_0$ *une constante* $M(r_0)$ indépendante *de* r *telle que* $|zf(z)| < M(r_0)$.
- *Pour presque tout* $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ *on ait* $\lim_{r \to 0} re^{i\theta} f(re^{i\theta}) = l_1$.

Alors

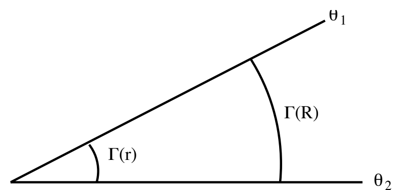
$$\lim_{r \to 0} \int_{\Gamma(r)} f(z) dz = i\, l_1 (\theta_2 - \theta_1).$$

Lemme 94 *On suppose que pour* z *appartenant à une portion de disque centré en* 0 *et d'ouverture* $\theta_2 - \theta_1$,

- *On puisse trouver pour* $|z| = R > R_0$ *une constante* $M(R_0)$ indépendante *de* R *telle que* $|zf(z)| < M(R_0)$.
- *Pour presque tout* $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ *on ait* $\lim_{R \to \infty} Re^{i\theta} f(Re^{i\theta}) = l_2$.

Alors

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma(R)} f(z)\,dz = i\, l_2 (\theta_2 - \theta_1).$$



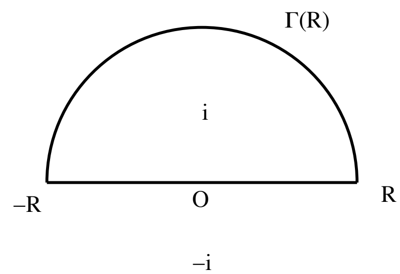
2.6.4 Exemple

Calcul de l'intégrale $I(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx$ *pour* $t > 0$ *puis pour* t *réel.*
On choisit la fonction de la variable complexe z

$$f(z) = \frac{e^{itz}}{1+z^2},$$

définie et holomorphe sur $D = \mathbb{C}$ privé des deux points i et $-i$. On choisit un contour constitué d'un intervalle $[-R, R]$ de l'axe des réels et d'un demi-cercle $\Gamma(R)$, centré à l'origine, situé au-dessus de l'axe réel, de rayon R assez grand pour entourer le point i.

Comme $1+z^2 = (z-i)(z+i)$ et que le numérateur de $f(z)$ ne s'annule pas pour $z = i$, le point $a_1 = i$ est de toute évidence un pôle simple pour la fonction f.



Application du théorème des résidus.

$$\int_{[-R,R]} f(z)dz + \int_{\Gamma(R)} f(z)dz = 2i\pi \text{Rés}(f, i).$$

Application du Lemme de Jordan.
Calculons $\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma(R)} f(z)\, dz$. On a

$$zf(z) = z\frac{e^{itz}}{1+z^2},$$

et pour $z \in \Gamma(R)$ la paramétrisation

$$z(\theta) = R\cos\theta + iR\sin\theta \quad \theta \in [0, \pi].$$

Par conséquent,

$$|zf(z)| = R\frac{e^{-Rt\sin\theta}}{|R^2e^{2i\theta}+1|} \leq \frac{R}{|R^2-1|},$$

car $t\sin\theta \geq 0$.

1. Posons $M(R) = \frac{R}{|R^2-1|}$. Puisque de toute évidence $\lim_{R\to\infty} M(R) = 0$, il y a une valeur R_0 telle que pour $R > R_0$ on ait $M(R) < M(R_0)$.
2. Par ailleurs on a
$$\lim_{R\to\infty} |zf(z)| = 0,$$
ce qui impose que $\lim_{R\to\infty} zf(z) = 0$, donc que $l_2 = 0$.

Le lemme 95 s'applique donc sur $\Gamma(R)$,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma(R)} f(z)\, dz = 0.$$

Calcul du résidus de f *en* $z = i$. Puisque le point i est pôle simple de f, on peut appliquer la formule 93 donnant le résidu en un pôle simple

$$\text{Rés}(f, i) = \lim_{z\to i} (z-i)\frac{e^{itz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-t}}{2i}.$$

Calcul de $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$. La fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on a donc

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_{[-R,R]} f(z)\,dz &= \lim_{R\to\infty}\int_{[-R,R]} f(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx.\end{aligned}$$

Prenons la $\lim_{R\to\infty}$ de chacun des deux membres de la formule du théorème des résidus,

$$\lim_{R\to\infty}[\int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{\Gamma(R)} f(z)\,dz] = 2i\pi\frac{e^{-t}}{2i}.$$

Finalement, pour $t > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itx}}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-t}.$$

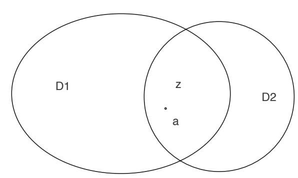
Question : Que vaut $I(t)$ pour $t \leq 0$?

2.7 Principe du prolongement analytique

Ce "principe" permet, connaissant la valeur d'une fonction holomorphe en certains points de son domaine d'holomorphie, de déterminer sa valeur en tout point de ce domaine.

Théorème 16 *Soit $z \mapsto f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine D du plan complexe telle que $f(z_i) = 0$ pour une suite infinie de points z_i qui* converge *vers un point $a \in D$. Alors $f(z) = 0$ pour* tout *$z \in D$.*

Théorème 17 (dit du prolongement analytique). *Soient deux fonctions f_1 et f_2 holomorphes chacune dans leurs domaines respectifs D_1 et D_2 supposés connexes. Supposons que $f_1(z_i) = f_2(z_i)$ pour (au minimum) une suite infinie de points $z_i \in D_1 \cap D_2$* convergente *vers un point $a \in D_1 \cap D_2$.*



On a alors

1. *$f_1(z) = f_2(z)$ pour tout $z \in D_1 \cap D_2$.*
2. *Il existe une fonction* unique *$z \mapsto F(z)$ holomorphe dans le domaine $z \in D_1 \cup D_2$ telle que*
   $F(z) = f_1(z)$ pour $z \in D_1$
   $F(z) = f_2(z)$ pour $z \in D_2$

Dans de telles circonstances, on dit que la fonction $z \mapsto F(z)$ est le "prolongement analytique" de f_1 (ou de f_2) du domaine D_1 (ou D_2) au domaine $D_1 \cup D_2$.

Remarque 95 *Dans la pratique, il se trouve très souvent que $f_1(z) = f_2(z)$ sur un segment ouvert de $D_1 \cap D_2$, le théorème 2 s'applique donc.*

Exemple 96 *Considérons les fonctions*

$$z \mapsto f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

qui est holomorphe dans le disque $|z| < 1$, et

$$z \mapsto f_2(z) = \frac{1}{1-z},$$

qui est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Puisque $f_1(z) = f_2(z)$ pour les $z = x$ réels compris entre 0 et 1, on déduit du Théorème 17 que f_1 est “prolongeable analytiquement” en une fonction F (égale ici à f_2) holomorphe dans tout le plan complexe privé du point $z = 1$.

Chapitre 3

Distributions

3.1 Introduction

Il y a plusieurs raisons pour introduire la notion de distribution. Certaines sont d'ordre purement physique (expérimental même) alors que d'autres sont des raisons plus mathématiques.

3.1.1 Unité pour la convolution.

Comme nous l'avons remarqué lors de l'étude de la convolution des fonctions intégrables, il n'y a pas de fonction intégrable Δ qui puisse servir d'unité pour le produit de convolution de ces fonctions. Dans l'espace des distributions, il y a effectivement une telle distribution unité pour le produit de convolution : c'est la distribution de Dirac, qui satisfait à

$$\delta * T = T * \delta = T.$$

3.1.2 Densité de charge d'une charge ponctuelle

En électrostatique, le potentiel électrique $V(\vec{r})$ en un point $\vec{r}$ donné de l'espace, pour une distribution de charge de densité $\rho(\vec{r})$ donnée est solution de l'équation de Laplace

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\rho(\vec{r}).$$

La question qu'on se pose est de savoir ce que signifie cette équation dans la limite où la charge, source du potentiel, peut d'une manière physiquement raisonnable être assimilée à une charge ponctuelle. On sait que dans ce cas le potentiel créé (mesuré physiquement) est un potentiel en $\frac{1}{r}$. L'équation de Laplace pose par contre dans ce cas un problème mathématique sérieux : quelle est la densité de charge d'une charge ponctuelle ? La réponse la plus simple se trouve naturellement dans la théorie des distributions. La densité d'une telle charge est en fait proportionnelle à une distribution de Dirac située au point où se trouve la charge électrique.

3.1.3 Mesure d'une grandeur physique

Considérons la mesure d'une grandeur physique relativement courante comme la température d'un fil rectiligne "en un point donné". On peut se convaincre que pour des raisons évidentes, une telle mesure n'est jamais réalisable parfaitement. Tout thermomètre, quel que soit le principe physique utilisé pour la mesure, possède *une extension spatiale* qu'il est impossible de réduire à celle d'un point : ce qu'il faudrait réaliser pour pouvoir mesurer la température en *un point* x_0.

On peut cependant admettre, dans le cas d'une mesure réaliste de température, que le thermomètre prend en compte toutes les températures dans un "voisinage" du point x_0 selon une fonction de sensibilité ϕ_0 (fig.1.) de telle sorte que pour une fonction de répartition $T(x)$ de la

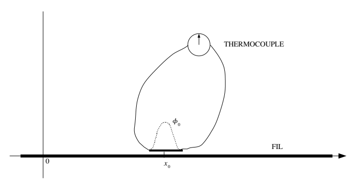


FIG. 3.1 – Mesure d'une température le long d'une barre

température le long de la barre (fonction dont on ignore *a priori* ce qu'elle vaut *vraiment* en un point précis de la barre), on puisse dire que la température mesurée T sera en fait

$$T_0 = \int T(x)\phi_0(x)\,dx.$$

Si on effectuait la mesure en un autre point x_1 on obtiendrait

$$T_1 = \int T(x)\phi_1(x)\,dx$$

etc...

On voit que la température mesurée T, dans l'hypothèse où les fonctions $T(x)$, ϕ_0, ϕ_2 etc... sont suffisamment régulières, se présente sous la forme d'un expression linéaire en la fonction de sensibilité ϕ. On peut noter aventageusement cette expression sous la forme

$$< T, \phi >= \int T(x)\phi(x)\,dx$$

Lorsque le produit $x \mapsto T(x)\phi(x)$ est intégrable Lebesgue, cette écriture est parfaitement justifiée. Cependant, dans beaucoup de cas concrets, la grandeur physique en question (ici il s'agirait de $T(x)$) se révèle être trop *singulière* pour que l'intégrale écrite puisse avoir un sens quelconque avec un choix réaliste pour la fonction ϕ.

Partant de cet échec, on a progressivement abstrait l'idée de concepts mathématiques qui ne préserveraient que l'indispensable de l'expression

$$< T, \phi >= \int T(x)\phi(x)\,dx,$$

partant d'un ensemble de fonctions ϕ représentant de manière suffisante toutes les mesures d'une grandeur physique donnée qu'il est possible d'effectuer. L'ensemble des fonctions ϕ prend alors naturellement le nom d'ensemble de **fonctions "test" ou fonctions "d'essai"**. La mesure d'une grandeur physique T est alors représentée par le "crochet"

$$< T, \phi >$$

indépendamment d'une forme intégrale ou non pour cette expression. L'ensemble des grandeurs T "mesurables" par les fonctions d'essai prend alors le nom générique de **distributions**.

Quel doit être le minimum exigé pour les objets ainsi considérés ?

1. L'ensemble des fonctions d'essai constitue un *espace vectoriel de fonctions*. C'est-à-dire que toute combinaison linéaire à coefficients complexes de fonctions d'essai est encore une fonction d'essai.
2. L'ensemble des distributions est l'ensemble des **formes linéaires** sur l'espace vectoriel des fonctions d'essai.
3. Le résultat de la mesure de T par ϕ est alors le nombre complexe $< T, \phi >$.

Remarque. Dans un esprit d'utilisation pratique (et élémentaire) des distributions, nous réduisons ici, les considérations d'analyse fonctionnelle au minimum. Pour cette raison, nous considérerons que **toutes** les formes linéaires sur nos espaces de fonctions test sont des formes linéaires *continues*. Mathématiquement on sait que de telles formes linéares non continues existent, mais comme personne n'a réussi, à ce jour, à les écrire explicitement, nous ferons comme si elles n'existaient pas !

3.2 L'espace des fonctions d'essai $\mathcal{D}$

Choisissons pour commencer un espace de fonctions test qui présente toutes les caractéristiques nécessaires aussi bien physiques que mathématiques.

Définition 97 *Les fonctions test $x \mapsto \phi(x)$ sont définies pour x réel et sont à valeurs complexes. On exige d'elles qu'elles soient indéfiniment dérivables pour toutes les valeurs de x (elles sont donc C^∞). Elles sont de plus, nulles en dehors d'un intervalle borné. L'ensemble de ces fonctions est désigné par $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ou simplement $\mathcal{D}$.*

L'ensemble des fonctions test de $\mathcal{D}$ constitue un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On peut se convaincre que ce sont là des propriétés raisonnables pour des fonctions de sensibilité d'appareil.

Exemple 98 *La fonction ξ_a définie par*

$$\xi_a(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{a^2}{a^2-x^2}) & si\ |x| < a \\ 0 & si\ |x| \geq a \end{cases}$$

est pour $a > 0$ une fonction d'essai.

Exemple 99 *Si α est une fonction indéfiniment dérivable et si ϕ est une fonction de $\mathcal{D}$, alors leur produit $\alpha\phi$ est une fonction de $\mathcal{D}$.*

On montre (voir au paragraphe 3.11.1) que la classe de toutes les fonctions α telles que $\alpha\phi$ est une fonction de $\mathcal{D}$ quel que soit ϕ appartenant à $\mathcal{D}$, est précisément l'ensemble de toutes les fonctions C^∞.

Remarque 100 *Pour ceux qui veulent en savoir plus , il faut dire qu'il est possible de définir une notion de proximité entre deux fonctions de $\mathcal{D}$. C'est ce qu'on désigne sous le nom de* topologie *sur $\mathcal{D}$ (voir au paragraphe 3.11.2.*

Exemple 101 *Soient f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors d'un intervalle borné et ϕ une fonction de $\mathcal{D}$. Alors leur produit de convolution*

$$(f * \phi)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi(x-t)\,dt$$

est une fonction de $\mathcal{D}$.

Exemple 102 *Soit ϕ une fonction de $\mathcal{D}$. Alors les fonctions translatée $\tau_a\phi$ et dilatée $d_\lambda\phi$ sont aussi dans $\mathcal{D}$. On rappelle que*

$$(\tau_a\phi)(x) = \phi(x-a)$$

où a est réel et que

$$(d_\lambda\phi)(x) = \phi(\frac{x}{\lambda})$$

où λ est un nombre réel différent de 0.

Exemple 103 *Les fonctions d'essai de $\mathcal{D}$ ainsi que toutes leurs dérivées sont intégrables et bornées.*

Ces deux propriétés sont souvent utilisées dans les calculs.

3.3 L'espace des distributions $\mathcal{D}'$

En accord avec la discussion de l'introduction, nous définissons les distributions de la façon suivante.

Définition 104 *Une distribution est une application T qui à chaque fonction de $\mathcal{D}$ fait correspondre un nombre complexe $T(\phi)$ FINI qui vérifie la propriété suivante*

$$T(a\phi + b\psi) = aT(\phi) + bT(\psi)$$

pour tous nombres complexes a et b et toutes fonctions d'essai ϕ et ψ dans $\mathcal{D}$.

Remarque 105 *En termes algèbriques, on voit donc qu'une distribution T est une* **forme linéaire** *sur l'espace vectoriel $\mathcal{D}$. D'où la notation $\mathcal{D}'$ qui indique que l'espace des distributions est en fait* **un espace dual** *de l'espace vectoriel des fonctions d'essai (voir au paragraphe 3.11.3).*

En théorie des distributions on note en général $T(\phi)$ sous la forme $< T, \phi >$ et on dit que la distribution T est appliquée à ϕ. Ceci est en conformité avec notre notation de l'introduction qui exprime le fait qu'on peut dire que physiquement $< T, \phi >$ est le résultat d'une mesure "par ϕ" de la distribution T.

L'espace des distributions $\mathcal{D}'$ est aussi un *espace vectoriel* sur $\mathbb{C}$, il suffit pour cela de définir la somme $T_1 + T_2$ de deux distributions ainsi que le produit aT d'un nombre complexe a et d'une distribution T. On définit

$$< T_1 + T_2, \phi > = < T_1, \phi > + < T_2, \phi >$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{D}$, et

$$< aT, \phi > = a < T, \phi > .$$

pour tout nombre complexe a et tout ϕ dans $\mathcal{D}$.

La distribution nulle, quant à elle, est définie par

$$T = 0 \Longleftrightarrow < T, \phi > = 0$$

pour tout ϕ dans $\mathcal{D}$.

Remarquons qu'une telle définition est parfaitement raisonnable du point de vue expérimental puisqu'elle veut dire qu'une quantité physique est nulle si et seulement si n'importe quelle mesure représentée par ϕ donne un résultat nul.

Mise en garde. Il n'est pas question de définir le produit de deux distributions quelconques entre elles car cela, on le verra par la suite, ne peut se faire que dans des cas **extrêmements limités** . Ce dernier point est bien entendu une des tares principale de la théorie des distributions et limite ainsi leur utilisation aux *problèmes linéaires*. Il touche d'ailleurs aux aspects les plus fondamentaux de la physique quantique moderne.

3.3.1 Les distributions régulières

Définition 106 *Une fonction f est dite* **localement intégrable** *si elle est intégrable sur tout intervalle borné (fini). On note $f \in L^1_{loc}$ cette propriété.*

Exemple 107 *À toute fonction localement intégrable on peut associer une distribution définie par*

$$< T_f, \phi > = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\, dx,$$

pour toute fonction d'essai ϕ dans $\mathcal{D}$.

Exemple 108 *Étant données deux fonctions localement intégrables f et g égales presque partout, i.e.*

$$f(x) = g(x) \text{ pour presque tout } x,$$

les distributions associées sont égales,

$$T_f = T_g.$$

La réciproque est aussi vraie (voir au paragraphe 3.11.4). D'où

Théorème 18

$$T_f = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0 \text{ pour presque tout } x.$$

Définition 109 *Une distribution T est* **régulière** *si elle est associée à une fonction localement intégrable f.*

Notation 110 *Lorsque le contexte ne prête à aucune confusion, il est très souvent plus simple de noter T_f tout simplement f.*

Par contre la notation $f(x)$, tolérée pour une fonction f l'est moins pour la distribution T_f, car elle laisse croire à tort qu'il est possible de connaître la valeur d'une distribution en un point précis x (elle est cependant utilisée !).

Exemple 111 *C'est ainsi que nous définissons la distribution (régulière) constante C par*

$$< C, \phi >= \int_{\mathbb{R}} C\phi(x)\,dx = C\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,dx,$$

pour toute fonction d'essai ϕ. En particulier $C = 0$ définit la distribution (régulière) nulle.

Exemple 112 *De même, la fonction de Heaviside*

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

définit la distribution de Heaviside H par

$$< H, \phi >= \int_{\mathbb{R}} H(x)\phi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^+} \phi(x)\,dx,$$

et la fonction $2H(x) - 1 = sgn(x)$ définit la distribution ϵ, qui est aussi notée sgn_x.

3.3.2 Distributions non régulières

Définition 113 *Toute distribution qui n'est pas régulière est dite non régulière.*

Exemple 114 *La distribution de Dirac à l'origine δ est définie par*

$$< \delta, \phi >= \phi(0)$$

pour toute fonction d'essai ϕ.

Elle n'est pas régulière.

Exemple 115 *La distribution de Dirac δ_{x_0} au point $x_0 \in \mathbb{R}$ est définie par*

$$< \delta_{x_0}, \phi >= \phi(x_0)$$

pour toute fonction d'essai ϕ.

Mise en garde. Les ouvrages de Physique et d'Électronique utilisent dans leur grande majorité la notation $\delta(x)$ pour la distribution δ et $\delta(x-x_0)$ pour la distribution δ_{x_0}. Cette notation est une source d'erreur constante dans les calculs, puisqu'elle laisse supposer que ces distributions ont une valeur donnée en un point donné. Pour éviter les erreurs, il est donc fortement recommandé d'effectuer les calculs au sens des distributions, quitte à présenter ensuite les formules finales comme le font traditionnellement les physiciens et les électroniciens.

Exemple 116 *La forme linéaire* $vp\frac{1}{x}$ *définie par*

$$< vp\frac{1}{x}, \phi >= \lim_{\varepsilon \to 0^+}[\int_{x<-\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\,dx + \int_{x>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\,dx]$$

pour toute fonction d'essai ϕ*, est une distribution non régulière.*

3.4 Suites et séries de distributions

3.4.1 Limite d'une suite de distributions.

Définition 117 *On dit que la suite de distributions* $\{T_n\}_0^\infty$ *de* $\mathcal{D}'$*, converge vers la distribution* T *si la suite de nombres complexes* $< T_n, \phi >$ *tend vers le nombre complexe* $< T, \phi >$ *pour* **toute** *fonction d'essai* ϕ *de* $\mathcal{D}$*.*

On écrit cela sous la forme

$$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{D}) T_n = T.$$

Ce qui, d'après la définition est équivalent à

$$\lim_{n\to\infty} < T_n, \phi >=< T, \phi >$$

pour **toute** fonction d'essai ϕ de $\mathcal{D}$.

Remarque 118 *Si cette distribution limite* T *existe, elle est unique.*

Remarque 119 *Si on peut trouver un nombre* $K(\phi)$ *qui dépend de la fonction d'essai* ϕ *choisie et qui est tel que*

$$\lim_{n\to\infty} < T_n, \phi >= K(\phi)$$

Alors la suite de distributions T_n *tend vers la distribution* T*, et on a*

$$< T, \phi >= K(\phi).$$

Remarque 120 *Du point de vue expérimental, cette* **limite au sens des distributions** *veut dire que pour n suffisamment grand la mesure par* ϕ *de la grandeur* T_n *donne pratiquement la même valeur que celle de* T*. Il ne devient plus possible de distinguer expérimentalement ces deux distributions.*

Noter qu'une suite de distributions *régulières* peut avoir comme limite une *distribution régulière.*

Exercice 121 *Montrer que si* T_λ *est la distribution associée à la fonction* $\sin \lambda x$*, on a*

$$\lim_{\lambda\to\infty} (\mathcal{D}') T_\lambda = 0.$$

Noter qu'une suite de distributions *régulières* peut avoir comme limite une *distribution non régulière.*

Exercice 122 *On définit la fonction porte* Π *par*

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & si\ |x| \le \frac{1}{2}; \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

et on pose $g_k(x) = k\Pi(kx)$*. Montrer que l'on a*

$$\lim_{k\to\infty} (\mathcal{D}') g_k = \delta.$$

3.4.2 Séries de distributions

Définition 123 *On considère la suite de distributions $\{T_n\}_1^\infty$. On dit que la série de distributions*

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n$$

définit une distribution T de $\mathcal{D}'$, si la suite des sommes partielles

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} T_n$$

converge au sens des distributions vers T, c'est-à-dire, lorsqu'on a

$$\lim_{N\to\infty} (\mathcal{D}') S_N = \lim_{N\to\infty} (\mathcal{D}') \sum_{n=1}^{N} T_n = T.$$

Dans la pratique, on a très souvent des séries du type $\sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n$. Dans ce cas la définition de la convergence est tout à fait analogue au cas précédent : il suffit en fait de considérer la convergence de la suite des sommes partielles "symétriques" $S_N = \sum_{n=-N}^{N} T_n$.

Exemple 124 *La suite $\Delta_N = \sum_{n=-N}^{N} \delta_n$ converge dans$\mathcal{D}'$ vers une distribution notée $\sum_{n\epsilon Z} \delta_n$, qu'on appelle Cha et qu'on note Ш (lettre de l'alphabet cyrillique). En physique on l'appelle aussi "Peigne de Dirac".*

3.4.3 Suites de fonctions convergeant vers δ

Deux théorèmes sont d'un usage courant et permettent de reconnaître si une suite de *distributions régulières* converge vers δ.

Théorème 19 *Soit $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite de fonctions positives intégrables telles que $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 1$ et que $f_n(x)$ soit nulle en dehors d'un intervalle $[-\varepsilon_n, +\varepsilon_n]$ avec $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Alors la suite de distributions régulières définies par f_n tend vers δ,*

$$\lim_{n\to\infty} (\mathcal{D}') f_n = \delta.$$

Théorème 20 *Soit f une fonction intégrable vérifiant $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$. On considère, pour $\varepsilon > 0$ la distribution régulière définie par la fonction*

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} f(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Alors f_ε tend vers δ lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (\mathcal{D}') f_\varepsilon = \delta.$$

Exercice 125 *Démontrer que $\lim_{k\to\infty} (\mathcal{D}') g_k = \delta$ pour*

$$g_k(x) = k\Pi(kx)$$

et pour

$$g_k(x) = \frac{\xi_a(kx)}{\int_R \xi_a(kx)\,dx}$$

où Π et ξ_a ont été définis précédemment.

Exercice 126 *Démontrer que* $\lim_{k\to\infty}(\mathcal{D}')g_k = \delta$ *pour*

$$g_k(x) = \frac{\sin^2 kx}{\pi k x^2}$$

et pour

$$g_k(x) = \frac{1}{k\pi}\frac{1}{x^2+\frac{1}{k^2}}.$$

Exercice 127 *En admettant (voir au paragraphe 3.11.5) que l'on a pour* $\lambda > 0$ *(avec des notations incorrectes !)*

$$\lim_{\lambda\to\infty}(\mathcal{D}')\frac{\sin\lambda x}{x} = \pi\delta,$$

donner une interprétation correcte de la formule des physiciens

$$\delta(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi kx}\,dx.$$

Remarque 128 *On voit donc sur ces derniers exemples qu'il est possible d'approcher une distribution aussi "singulière" que* δ *par des distributions "extrêmement" régulières. Le cas le plus spectaculaire étant celui qui est fourni par le deuxième exemple de l'exercice 127, où les distributions approchant* δ *sont associées à des fonctions* $g_k(x)$ *qui se trouvent être des fonctions d'essai dans* $\mathcal{D}$.

Ceci est en fait une propriété générale. On démontre qu'on peut approcher *toute* distribution de $\mathcal{D}'$ par une suite de distributions régulières associées à des fonctions d'essai de $\mathcal{D}$. On dit que l'espace $\mathcal{D}$ est **dense** dans $\mathcal{D}'$.

3.5 Opérations élémentaires sur les distributions

Exercice 129 *Désignons par* f *et* g *les distributions régulières associées aux deux fonctions localement intégrables* f *et* g. *Montrer que l'on a, pour toute fonction d'essai* ϕ

a) $< f+g,\phi > = < f,\phi > + < g,\phi >$
b) $< \lambda f,\phi > = \lambda < f,\phi >$ *pour* $\lambda \in C$
c) $< \alpha f,\phi > = < f,\alpha\phi >$ *pour* α, *fonction* C^∞
d) $< \tau_a f,\phi > = < f,\tau_{-a}\phi >$ *pour* $a \in R$
e) $< d_a f,\phi > = < f,|a|d_{1/a}\phi >$ *pour* $a \in R - 0$

Pour pouvoir reproduire ces résultats particuliers, on pose par définition, pour toute fonction test ϕ :

Somme. Pour deux distributions T_1 et T_2 ;

$$< T_1+T_2,\phi > = < T_1,\phi > + < T_2,\phi > .$$

Produit par un nombre. Pour une distribution T et un nombre complexe $\lambda \in C$,

$$< \lambda T,\phi > = \lambda < T,\phi > .$$

Produit par une fonction C^∞. Soient une distribution T de $\mathcal{D}'$ et α une fonction C^∞, on définit leur produit αT par

$$< \alpha T,\phi > = < T,\alpha\phi > .$$

Exemple 130 *Pour* α, *fonction* C^∞

$$\alpha\delta = \alpha(0)\delta.$$

Cette relation est souvent interprétée en physique en disant que δ est une **distribution propre** de **l'opérateur de multiplication** par une fonction α, avec la **valeur propre** $\alpha(0)$.

Exemple 131 *En désignant par x la fonction qui à x donne x*

$$x\delta = 0.$$

Exemple 132

$$xvp\frac{1}{x} = 1.$$

Cette relation est extrêmement intéressante, car elle nous dit que l'inverse de x au sens des distributions n'est autre que la distribution $vp\frac{1}{x}$ et non pas $\frac{1}{x}$ qui, de toute évidence ne *peut pas* définir une distribution régulière (pourquoi ?).

Exemple 133 *Soit α, une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui est C^∞ et qui ne s'annule jamais. Pour toute distribution T , on a*

$$\alpha T = 0 \iff T = 0.$$

On admettra (voir au paragraphe 3.11.6) que si $T \in \mathcal{D}'$

$$xT = 0 \iff T = k\delta.$$

où k est un nombre complexe arbitraire.

Translation. Pour $a \in \mathbb{R}$, la translatée $\tau_a(T)$ d'une distribution T est définie par

$$< \tau_a T, \phi >=< T, \tau_{-a}\phi > .$$

Exemple 134

$$\tau_a \delta = \delta_a.$$

Exemple 135 *Soit α une fonction indéfiniment dérivable et T une distribution de $\mathcal{D}'$. Pour tout a réel,*

$$\tau_a(\alpha T) = (\tau_a \alpha)(\tau_a T).$$

Exemple 136 *Pour tout x_0 réel,*

$$(x - x_0)T = 0 \iff T = k\delta_{x_0}.$$

Dilatation. Pour $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, la dilatée $d_a T$ d'une distribution T est définie par

$$< d_a T, \phi >=< T, |a| d_{\frac{1}{a}} \phi > .$$

Exemple 137

$$d_a \delta = |a|\delta.$$

Exemple 138

$$d_a \delta_{x_0} = |a|\delta_{ax_0}.$$

3.5.1 Parité

Posons $\check{T} = d_{-1}T$

Exemple 139 *Pour toute fonction test ϕ,*

$$< \check{T}, \phi >=< T, \check{\phi} >,$$

où $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$.

Définition 140 *On dit que T est une distribution paire si $\check{T} = T$ et impaire si $\check{T} = -T$.*

Exemple 141 *La distribution δ est paire, de même que $\delta_{x_0} + \delta_{-x_0}$.*

Exemple 142 *La distribution* $vp\frac{1}{x}$ *est impaire, de même que* $sgn_x = 2H - 1$.

Exemple 143 *La distribution* H *n'a pas de parité bien définie, de même que* δ_{x_0} *pour* $x_0 \neq 0$.

Exercice 144 *Toute distribution peut s'écrire de façon unique comme somme d'une distribution paire et d'une distribution impaire*

$$T = \frac{T + \check{T}}{2} + \frac{T - \check{T}}{2}$$

Appliquer cette formule aux distributions H *et* δ_{x_0}.

3.6 Dérivée d'une distribution

C'est une opération qui est *toujours* réalisable et celà autant de fois que l'on veut sur les distributions !

Exemple 145 *Considérons une fonction* $x \mapsto f(x)$ *qui est dérivable à dérivée continue pour tout* x, *on dit que c'est une fonction* C^1, *et on note* $x \to f'(x)$ *sa dérivée. Les deux fonctions* f *et* f' *définissent chacune une distribution que nous noterons aussi respectivement* f *et* f' *et on a*

$$< f', \phi >= - < f, \phi' > .$$

Définition 146 *Par analogie, nous dirons que la* dérivée *d'une distribution* T *est la distribution* T' *définie par*

$$< T', \phi >= - < T, \phi' >$$

pour toute fonction d'essai ϕ.

On vérifie que pour une distribution régulière T_f associée à une fonction f qui est C^1, on retrouve la formule précédente.

Exemple 147 *a) Pour une constante* K *on a* $K' = 0$.
b) $H' = \delta$
c) $(sign_x)' = 2\delta$

Exemple 148 *La dérivée p-ième* $\delta^{(p)}$ *de* δ *est définie par*

$$< \delta^{(p)}, \phi >= (-1)^p \phi^{(p)}(0),$$

pour toute fonction d'essai ϕ.

Exemple 149 *Les deux distributions* δ *et* δ' *sont* linéairement indépendantes, *c'est-à-dire que si* a *et* b *sont deux nombres complexes arbitraires*

$$a\delta + b\delta' = 0 \iff a = b = 0.$$

Exemple 150 *Si* T *est une distribution et* α *une fonction* C^∞, *on a*

$$(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'.$$

On admettra aussi (voir au paragraphe 3.11.7) que l'on a

$$T' = 0 \iff T = K$$

où K est une constante.

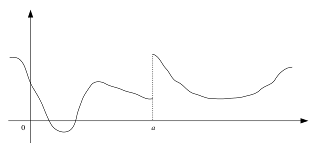


FIG. 3.2 – Fonction C^1 par morceaux

Théorème 21 Formule des sauts. *Soit une fonction f qui est C^1* **par morceaux**, *on suppose pour simplifier la présentation, qu'elle n'a de discontinuité qu'en un seul point a de l'axe réel, on a*

$$(T_f)' = T_{\{f'\}} + \sigma_a \delta_a.$$

où σ_a désigne le **saut (fini)** *de la fonction au point a,*

$$\sigma_a = \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(a+\varepsilon) - \lim_{\varepsilon \to 0^+} f(a-\varepsilon),$$

et où on a noté $T_{\{f'\}}$ la distribution régulière associée à la fonction définie presque partout *$x \to f'(x)$.*

La généralisation est immédiate au cas où la fonction f possède N sauts aux points $\{a_i\}_1^N$

$$(T_f)' = T_{\{f'\}} + \sum_{i=1}^{N} \sigma_{a_i} \delta_{a_i}$$

et même au cas où $N = \infty$ sous la condition que la série écrite soit une *série convergente* au sens des distributions.

Exercice 151 *Calculer la dérivée au sens des distributions de*
a) La distribution régulière Π définie par la fonction porte $\Pi(x)$.
b) La distribution régulière Λ définie par la fonction

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 152 *Calculer, au sens des distributions, les dérivées*
a) $(|x|)^{(p)}$.
b) $(|x|^n)'$ pour n entier et ≥ 1.
c) $(\alpha H)^{(p)}$ où α est une fonction C^∞.

Application. L'étudiant qui a l'occasion d'utiliser un oscillographe cathodique pourra "dériver" à l'oscillographe n'importe quel signal et se convaincre sur un exemple donné (la distribution H par exemple) que le résultat obtenu n'est autre que la dérivée du signal *au sens des distributions*.

3.7 Les opérateurs continus sur $\mathcal{D}'$

Définition 153 *Un* **opérateur linéaire** *A sur $\mathcal{D}'$ est une application linéaire de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$, c'est-à-dire que*

$$A(aT_1 + bT_2) = aA(T_1) + bA(T_2)$$

pour tout nombre complexe a, b et toute distribution T_1 et T_2 de $\mathcal{D}'$.

Définition 154 *Un opérateur A est un* **opérateur continu** *si, quelle que soit la suite convergente $\{T_n\}$ de distributions T_n de $\mathcal{D}'$*

$$\lim_{n\to\infty}(\mathcal{D}')T_n = T,$$

on a

$$\lim_{n\to\infty}(\mathcal{D}')(AT_n) = AT.$$

La derniére égalité peut encore s'écrire sous la forme lapidaire

$$\lim(AT_n) = A(\lim T_n),$$

indiquant que la continuité d'un opérateur A veut dire qu'on est autorisé à permuter l'action de A et la prise de la limite.

Exemple 155 *Les opérateurs suivants, définis sur $\mathcal{D}'$, sont tous continus*
a) $T \to T + T_0$ *où* $T_0 \in \mathcal{D}'$
b) $T \to aT$ *où* $a \in C$
c) $T \to \alpha T$ *où* $\alpha \in C^\infty$
d) $T \to \tau_a T$ *où* $a \in R$
e) $T \to d_a T$ *où* $a \in R$
f) $T \to T'$

Exercice 156 *Montrer que $\tau_1 III = III$. Que veut dire ce résultat ? Montrer que III est paire.*

Exercice 157 *Calculer III' ; αIII où α est C^∞. Calculer $(e^{2i\pi x} - 1)III$.*

Exercice 158 *Calculer* $(|\cos x|)''$.

Exercice 159 *Montrer que* $\lim_{|\lambda|\to\infty}(\mathcal{D}')(\lambda \cos \lambda x) = 0$

Remarque 160 *Une catégorie extrêmement importante d'opérateurs continus est constituée par les* **filtres** *en théorie du signal.*

3.8 Série de Fourier d'une distribution périodique

Définition. On dit qu'une distribution $U \in \mathcal{D}'(R)$ est **T-périodique** si on a pour une translation positive τ_T

$$\tau_T(U) = U.$$

Le nombre T est une **période** de la distribution U et le plus petit de ces nombres est appelé **période fondamentale**.

Définition 161 *Soit U une distribution, I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que le support de U est contenu dans I si, pour toute fonction d'essai ϕ nulle sur I, $\langle U, \phi\rangle$.*

On dit que U est à support borné *si son support est contenu dans un intervalle borné.*

Théorème 22 *Si U est une distribution périodique de période T, il existe une distribution V à* support borné *telle que*

$$U = \sum_{k\in Z} \tau_{kT}(V).$$

Exemple 162 *Soit f une fonction T-périodique dans $L^1(T)$, elle définit une distribution T-périodique U_f et on peut prendre pour V la distribution régulière définie par la fonction v*

$$v(t) = \begin{cases} f(t) & \textit{si } t \in [a, a+T[\textit{ où } a \in R \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Exercice 163 *Prenons pour V la distribution de Dirac à l'origine. Donner l'expression de la distribution T-périodique III_T ainsi obtenue.*

Définition 164 *Soit U une distribution T-périodique telle que $U = \sum_{k\in Z} \tau_{kT}(V)$. On appelle* coefficients de Fourier *de U les nombres complexes*

$$c_k(U) = \frac{1}{T}\langle V, e^{-ik\omega t}\rangle,$$

où $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $k \in Z$.

Remarque 165 *Le nombre $< V, e^{-ik\omega t} >$ est parfaitement défini puisque la fonction $t \to e^{-ik\omega t}$ est une fonction C^∞ et que le support de V est borné.*

Théorème 23 *Soit U une distribution T-périodique, alors*

$$U = \lim_{N\to\infty} (\mathcal{D}') \sum_{k=-N}^{k=+N} c_k(U) e^{ik\omega t},$$

et pour $k \neq 0$, on a $|c_k(U)| \leq Const.|k|^r$, où r est un entier positif.

Inversement. *Une suite de nombres $\{c_k\}_{-\infty}^{\infty}$ satisfaisant à l'inégalité précédente est la suite des coefficients de Fourier d'une distribution T-périodique.*

Proposition 166 *Soit U' la dérivée de la distribution T-périodique U, on a alors*

$$c_k(U') = ik\omega c_k(U).$$

Exercice 167 *Calculer les coefficients de Fourier $c_k(III_T)$ et $c_k III_T$.*

3.9 Méthode de la variation de la constante

Motivation. Considérons un système physique, par exemple, un oscillateur harmonique gouverné par une équation différentielle de la forme $ay'' + by' + cy = F(t)$, où $F(t)$ est un terme de forçage. On donne au système une impulsion brutale au temps $t = 0$. Cela signifie que $F(t)$ est proportionnel à la distribution de Dirac à l'origine. Quelle est la réponse du système ? On est amené à résoudre des équations différentielles dont le second membre est une distribution, avec inconnue distribution.

3.9.1 Cas des équations différentielles du premier ordre

On commence par résoudre les équations différentielles de la forme

$$(\mathcal{E}) \quad a(x)y' + b(x)y = U,$$

où a et b sont des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$, a ne s'annule pas et U est une distribution.

Proposition 168 *La méthode classique de résolution s'étend au cas où le second membre est une distribution.*

1. On résoud l'équation homogène. On trouve des solutions proportionnelles, $f(x) = C\, e^{c(x)}$ où c est une primitive de $-b/a$.

2. On cherche une solution particulière de l'équation $(\mathcal{E})$ sous la forme $T = e^{c(x)}U$, où U est une distribution inconnue. Cela conduit à $T' = e^{-c}U$, qui possède une solution T_0.
3. Toutes les solutions sont de la forme $T = T_0 + C\, e^{c(x)}$.

Exemple 169 *Résoudre l'équation différentielle $y' + 2xy = \delta_0$.*

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $f(x) = C\, e^{x^2}$. Il reste à résoudre $T' = e^{-x^2}\delta_0 = \delta_0$, soit $T_0 = H$, fonction d'Heaviside. Toutes les solutions sont de la forme $T = (H + C)e^{x^2}$.

3.9.2 Cas des équations différentielles à coefficients constants

Revenons au problème initial, un oscillateur qu'on brutalise. Tant que $t < 0$, il ne se passe rien, donc la solution est nulle. Lorsque $t > 0$, le système oscille librement, son mouvement est solution de l'équation *homogène* $ay'' + by' + cy = 0$. Donc on peut penser que la solution est de la forme $f(t)H$ où f est solution de l'équation homogène.

Proposition 170 *L'équation différentielle $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = \delta_0$ possède une solution de la forme $f(t)H$ où f est solution de l'équation homogène $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$.*

3.9.3 Seconds membres généraux

Définition 171 *Si U est une distribution et ϕ une fonction d'essai, on peut définir une fonction $U \star \phi$ par*

$$U \star \phi(x) = \langle U, \tau_x \hat{\phi} \rangle.$$

Exemple 172 *Pour toute fonction d'essai ϕ, $\delta \star \phi = \phi$.*

Proposition 173 *Pour tout distribution U et toute fonction d'essai ϕ, la fonction $U \star \phi$ est indéfiniment dérivable, et*

$$(U \star \phi)' = U' \star \phi = U \star \phi'.$$

Corollaire 174 *Si U est une solution de l'équation différentielle $ay''+by'+cy = \delta_0$, alors $T = U\star\phi$ est une solution de $ay'' + by' + cy = \phi$.*

3.9.4 Interprétation

Revenons au problème initial, un oscillateur initialement au repos, que l'on soumet à une force $F(t)$. Son mouvement est donc gouverné par l'équation $ay'' + by' + cy = F(t)$.

Supposons que F est une fonction d'essai, nulle tant que $t < 0$. Pour calculer le mouvement, on doit d'abord calculer la *réponse impulsionnelle*, i.e. la solution de l'équation $ay'' + by' + cy = \delta_0$ qui est de la forme $U = f(t)H$ (la méthode de la variation de la constante peut nous y aider). Ensuite, il suffit de calculer le produit de convolution $U \star F$. Autrement dit, la réponse impulsionnelle sert en quelque sorte de matrice pour l'opérateur qui à une excitation F associe le mouvement résultant $y = U \star F$.

3.10 Retour sur l'équation de la chaleur

3.10.1 Rappel

On rappelle que lorsque la chaleur diffuse le long d'un fil conducteur homogène infini, la température $f(x, t)$ à l'abscisse x et à l'instant t obéït à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} = c\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \tag{3.1}$$

où c est une constante physique. On a vu, dans le cours d'intégration, que lorsque la répartition initiale de la température, la fonction $f_0(x) = f(x,0)$, est intégrable sur $\mathbb{R}$, la répartition $f_t(x) = f(x,t)$ de la température au temps $t > 0$ est donnée par

$$f_t = p_t \star f_0, \tag{3.2}$$

où, pour $t > 0$,

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Que signifie cette fonction p_t ?

3.10.2 Equation de la chaleur à donnée initiale distribution

La fonction p_t s'interprète comme la répartition de la température obtenue au temps t lorsqu'une quantité unité de chaleur est placée initialement à l'origine. Comment donner un sens précis à cette affirmation ? En montrant que la formule (3.2) s'étend à toutes les distributions à support borné, et en particulier, à la distribution de Dirac, et en vérifiant que, dans le cas où f_0 est la distribution de Dirac, $f_t = p_t$.

Définition 175 *Soit U une distribution à support borné. On définit la distribution $p_t \star U$ comme suit. Si ϕ est une fonction d'essai,*

$$\langle p_t \star U, \phi \rangle = \langle U, p_t \star \phi \rangle$$

Remarque 176 *Pour justifier la définition 176, il faut vérifier qu'elle coïncide avec la définition 172 pour les distributions régulières associées aux fonctions d'essai, i.e. que si ϕ et ψ sont des fonctions d'essai,*

$$\int_{\mathbb{R}^2} p_t(y)\psi(x-y)\phi(x)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} p_t(y)\phi(x-y)\psi(x)\,dx\,dy.$$

Comme p_t est paire, cette identité équivaut après changement de variable à

$$\int_{\mathbb{R}^2} p_t(y)\psi(-x+y)\phi(-x)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} p_t(y)\phi(x-y)\psi(x)\,dx\,dy.$$

Autrement dit,

$$((p_t \star \hat{\psi}) \star \phi)(0) = ((p_t \star \phi) \star \hat{\psi})(0),$$

ce qui résulte de la commutativité et de l'associativité de la convolution des fonctions intégrables.■

Proposition 177 *Pour $t > 0$ la distribution $p_t \star U$ est régulière, c'est une fonction indéfiniment dérivable en t et en x, qui est solution de l'équation de la chaleur (3.1). De plus,*

$$\lim_{t\to 0}(\mathcal{D}')\ p_t \star U = U.$$

Exemple 178 *Cas de la distribution de Dirac : $p_t \star \delta_0 = p_t$.*

En effet, pour toute fonction d'essai ϕ,

$$\begin{aligned}\langle p_t \star \delta_0, \phi \rangle &= \langle \delta_0, p_t \star \phi \rangle \\ &= p_t \star \phi(0) \\ &= \langle p_t, \phi \rangle .■\end{aligned}$$

3.10.3 Conclusion

Notons A_t l'opérateur qui à une répartition de température initiale associe la répartition de température obtenue en laissant la chaleur diffuser pendant un temps t. Sur l'espace des polynômes trigonométriques sur un fil fini, on sait diagonaliser l'équation de la chaleur, et donc calculer explicitement A_t. La même méthode marche sur un fil infini, à condition de remplacer une série de Fourier finie par la transformation de Fourier. La matrice finie de A_t est remplacée par une sorte de matrice infinie indexée par les réels, la convolution par le noyau de la chaleur.

Cette démarche est assez générale, elle s'applique à d'autres équations d'évolution à coefficients constants, comme l'équation de Schrödinger ou l'équation des ondes.

Signalons une particularité de l'équation de la chaleur. La température devient, après diffusion, très régulière. L'équation des ondes ne se comporte pas comme cela (les ondes possèdent des fronts). Voici une explication mathématique, qui repose à nouveau sur l'analogie avec les matrices finies. L'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ a toutes ses valeurs propres de la forme $-k^2$, elles sont négatives. Par conséquent, les valeurs propres de A_t sont de forme $e^{-k^2 ct}$, elles tendent vers 0 lorsque k tend vers l'infini. L'opérateur A_t écrase les hautes fréquences, donc il rend les fonctions davantage différentiables.

3.10.4 A retenir

- Une distribution n'a pas de valeur en un point, cela peut seulement être mesuré par une fonction d'essai.
- Il est utile de se savoir translater et dilater des distributions.
- Des distributions non régulières comme la distribution de Dirac, apparaissent souvent comme limites de distributions régulières, par dilatation.
- Toute distribution peut-être dérivée. Pour les fonctions dérivables par morceaux mais possédant des sauts, la dérivée comporte des distributions de Dirac.
- La méthode de la variation de la constante s'étend aux distributions.
- La convolution s'étend à certaines familles de distributions, et c'est utile pour résoudre des équations différentielles.

3.11 Appendices

Ces appendices contiennent des démonstrations éludées en cours de route.

3.11.1 Caractérisation des fonctions C^∞

Soit α telle que $\alpha\phi \in \mathcal{D}$ pour toute $\phi \in \mathcal{D}$.

Ceci entraîne en particulier $\alpha\phi \in C^\infty$. La fonction ξ_2 est strictement positive sur $[-1, +1]$, donc $\frac{1}{\xi}$ est C^∞ sur $[-1, +1]$. On peut donc écrire

$$\frac{1}{\xi_2}.f\xi_2 \in C^\infty$$

or

$$\frac{1}{\xi_2}.f\xi_2 = f$$

et f est par conséquent C^∞ sur l'intervalle $[-1, +1]$. Un raisonnement analogue montrerait, en prenant des translatées de ξ_2, que f est C^∞ sur tout intervalle $[n, n+2]$ avec $n \in Z$, donc C^∞ sur R. Par suite

$$\alpha\phi \in \mathcal{D}$$

pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}$ est équivalent à $\alpha \in C^\infty$.

3.11.2 Topologie sur $\mathcal{D}$

Sur $\mathcal{D}$ nous avons la notion de convergence suivante. On dit qu'une suite ϕ_j de $\mathcal{D}$ converge vers $\phi \in \mathcal{D}$ pour $j \to \infty$ si

1. Les ϕ_j sont nulles en dehors d'un *même* intervalle borné.
2. $\lim_{j\to\infty} \sup_R |\phi_j^{(n)} - \phi^{(n)}| = 0$ pour $n = 1, 2, ...$

3.11.3 Topologie sur $\mathcal{D}'$

Une distribution T est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$ au sens où

$$\lim_{j\to\infty} (\mathcal{D})\phi_j = \phi$$

(selon la définition du paragraphe 3.11.2) entraîne que

$$\lim_{i\to\infty} |T(\phi_j) - T(\phi)| = 0.$$

3.11.4 $T_f = 0 \Rightarrow f = 0$ presque partout

Par définition

$$T_f = 0 \Leftrightarrow < T_f, \phi >= 0$$

pour toute fonction d'essai $\phi \in \mathcal{D}$. Qui est encore équivalent à

$$\int_R f(x)\phi(x)dx = 0$$

pour toute fonction d'essai $\phi \in \mathcal{D}$.

Mais toute fonction d'essai $\phi \in \mathcal{D}$ peut s'écrire

$$\phi(x) = e^{-2i\pi ux}\psi,$$

où $u \in R$ et $\psi \in \mathcal{D}$ (il suffit d'écrire

$$\phi(x) = e^{-2i\pi ux}e^{2i\pi ux}\phi(x)$$

et de poser $\psi(x) = e^{2i\pi ux}\phi(x)$).

Alors

$$\int_R f(x)\phi(x)\,dx = \int_R e^{-2i\pi ux} f(x)\psi(x) = 0$$

pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}$

$$= F[f\psi](u) = 0$$

pour tout $u \in R$.

Or $F[f\psi](u) = 0$ implique que $f\psi = 0$ presque partout, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}$, donc,*en particulier* pour une fonction de la forme $\psi = \tau_n \xi_1$, où $n \in Z$. Donc $f = 0$ presque partout sur chaque intervalle de la forme $[n, n+1]$, c'est-à-dire que l'ensemble E_n des points de $[n, n+1]$ où $f \neq 0$ est de longueur nulle. Comme $\bigcup_n [n, n+1] = \mathbb{R}$, on peut dire que l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ où $f \neq 0$ est de longueur nulle.

3.11.5 Convergence des distributions $\frac{\sin \lambda x}{x}$

Ceci est un simple exercice, à condition de montrer d'abord le lemme suivant

Lemme 179 *Toute fonction $\phi \in \mathcal{D}$ peut s'écrire sous la forme*

$$\phi(x) = \phi(0) + x\psi(x),$$

où la fonction ψ est une fonction C^∞.

3.11.6 Résolution de l'équation $xT = 0$ pour $T \in \mathcal{D}'$

Par définition

$$xT = 0 \Leftrightarrow < xT, \phi >= 0$$

pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}$.

Or

$$< xT, \phi >=< T, x\phi > .$$

Il en résulte que T est nulle sur toute fonction χ de la forme $\chi = x\phi$ avec $\phi \in \mathcal{D}$. Mais ces fonctions χ *ne remplissent pas tout* $\mathcal{D}$. Elles sont en fait caractérisées par la condition $\chi(0) = 0$.

En effet, si $\chi = x\phi$ avec $\phi \in \mathcal{D}$, on a $\chi(0) = 0$.

Inversement, si $\chi \in \mathcal{D}$ vérifie $\chi(0) = 0$, on peut l'écrire (voir au paragraphe 3.11.5)

$$\chi(x) = x\phi(x),$$

où $\phi \in \mathcal{D}$.

Soit alors $\psi_0 \in \mathcal{D}$ une fonction fixée, choisie de telle sorte que $\psi_0(0) = 1$. On peut écrire, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}$, lequel est un espace vectoriel

$$\psi = \psi(0)\psi_0 + \chi$$

$$\begin{aligned} \psi(0) &= \psi(0)\psi_0(0) + \chi(0) \\ &= \psi(0) + \chi(0) \end{aligned}$$

d'où $\chi(0) = 0$.

Alors

$$< T, \psi >= \psi(0) < T, \psi_0 > + < T, \chi >$$

et compte tenu de ce que

$$\begin{aligned} < T, \chi >&= 0 \\ &= \psi(0) < T, \psi_0 > \\ &= C\psi(0) \end{aligned}$$

en posant $< T, \psi_0 >= C$

$$=< C\delta, \psi >$$

pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}$. Donc, T est nécessairement de la forme

$$T = C\delta.$$

La réciproque est évidente, car si $T = C\delta$, on a $xT = 0$ pour toute constante C.

En résumé

$$xT = 0 \Leftrightarrow T = C\delta,$$

où C est un nombre complexe.

3.11.7 Résolution de l'équation $T' = 0$ pour $T \in \mathcal{D}'$

Cette équation est équivalente à

$$< T', \phi >= - < T, \phi >= 0, \qquad \forall\phi \in \mathcal{D}.$$

Par conséquent, T est nulle lorsqu'elle est testée par toute fonction qui est la dérivée d'une fonction de $\mathcal{D}$. Mais les fonctions ϕ_0 de ce type ne remplissent pas tout $\mathcal{D}$. Elles sont caractérisées en fait par les deux conditions

$$\phi_0 \in \mathcal{D}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_0 = 0,$$

constituant ainsi un sous-espace vectoriel $E_0 \subset \mathcal{D}$.

On a donc

$$< T, \phi_0 >= 0$$

pour toute fonction $\phi_0 \in E_0$.

Rappelons que T ne sera connue que si ses valeurs $< T, \phi >$ sont connues pour *toute* $\phi \in \mathcal{D}$.

Considérons alors une fonction $\phi_1 \in \mathcal{D}$ *n'appartenant pas* à E_0, choisie de telle sorte que

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_1 = 1.$$

L'espace $\mathcal{D}$ étant un espace vectoriel, on peut toujours écrire, pour $\phi \in \mathcal{D}$ quelconque

$$\phi = \phi_1 \int_{\mathbb{R}} \phi + \phi_0$$

où $\phi_0 \in \mathcal{D}$.

On remarque que nécessairement $\phi_0 \in E_0$ car

$$\int_{\mathbb{R}} \phi = \int_{\mathbb{R}} \phi_1 . \int_{\mathbb{R}} \phi + \int_{\mathbb{R}} \phi_0,$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_0 = 0.$$

De plus, la valeur de T testée par $\phi \in \mathcal{D}$ quelconque sera alors connue si on connaît $< T, \phi_1 >$. En effet

$$< T, \phi >=< T, \phi_1 > \int_{\mathbb{R}} \phi \quad + < T, \phi_0 >$$

Le dernier terme étant nul, on a en posant $< T, \phi_1 >= k$,

$$< T, \phi >= k \int_{\mathbb{R}} \phi =< k, \phi >$$

pour toute $\phi \in \mathcal{D}$.

Il en résulte que T est nécessairement de la forme

$$T = k.$$

Réciproquement, si $T = k$ on a $T' = 0$. En résumé

$$T' = 0 \Leftrightarrow T = k,$$

où k est une constante complexe.